مذكرة : تطبيقات الرياضيات

فى الاستاتيكا

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الترم الأول ٢٠٢٠

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ ماهر ابودار

الوحدة الأولى : الاستاتيكا

- القوى – محصلة قوتين متلاقتين فى نقطة
- تحليل القوة إلى مركبتين
- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة
- اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية فى نقطة
  (قاعدة مثلث القوى – قاعدة لامى)
- تابع الاتزان (تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة)

مراجعة المتجهات

تكافؤ قطعتين مستقيمين موجهتين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين أنهما متكافئتان إذا كانتا

(١) لهما نفس الطول (٢) لهما نفس الاتجاه

فمثلا: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{م ن}}$ لاختلاف الطول

، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ لاختلاف الاتجاه

تعريف جمع متجهين:-

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س١ ، ص١) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س٢ ، ص٢)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (س١ + س٢ ، ص١ + ص٢)

فمثلاً :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ـ ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (١ ، ٥)

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٢ + ١ ، ـ ٣ + ٥) = (٣ ، ٢)

خواص جمع المتجهات :

(١) خاصية الإبدال : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$ = $\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{أ}}$

(٢) خاصية الدمج (التجميع) : $\overleftarrow{\text{أ}}$ + ($\overleftarrow{\text{ب}}$ + $\overleftarrow{\text{جـ}}$) = ($\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{ب}}$) + $\overleftarrow{\text{جـ}}$

(٣) المتجه الصفرى : $\overleftarrow{\text{و}}$ = (٠ ، ٠) ويكون $\overleftarrow{\text{أ}}$ + $\overleftarrow{\text{و}}$ = $\overleftarrow{\text{و}}$ + $\overleftarrow{\text{أ}}$ = $\overleftarrow{\text{أ}}$

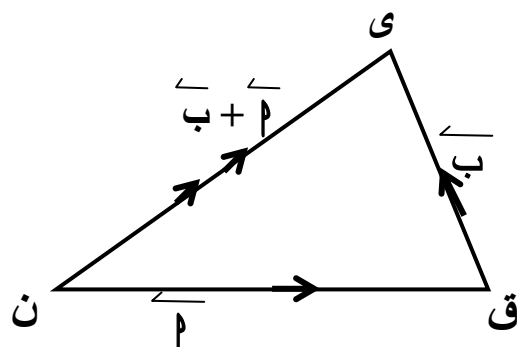
(٤) المعكوس الجمعى : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) فإن (ـ $\overleftarrow{\text{أ}}$) = (ـ س ، ـ ص)

تعريف ضرب المتجه فى عدد حقيقى :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) ، ك ∈ ح

فإن : ك $\overleftarrow{\text{أ}}$ = ك (س ، ص) = (ك س ، ك ص)

جمع المتجهات هندسياً :

(١) قاعدة المثلث

إذا كان : ن ق تمثل المتجه ٲ ، ق ى تمثل المتجه ب

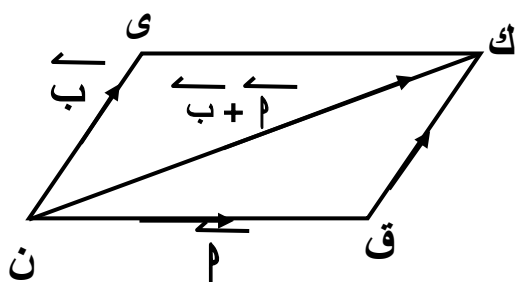
فأن : ن ى تمثل المتجه ٲ + ب

أى أن : ن ق + ق ى = ن ى

(٢) قاعدة متوازى الأضلاع :

إذا كان : ن ق تمثل المتجه ٲ ، ن ى تمثل المتجه ب

فأن : ن ك تمثل المتجه ٲ + ب

أى أن : ن ق + ق ى = ن ك

ملاحظات :

[١] فى أى مثلث ٲ ب جـ يكون : ٲ ب + ب جـ + جـ ٲ = و

[٢] إذا كان أ ء متوسط فى Δ ٲ ب جـ فإن : ٲ ب + ٲ جـ = ٢ ٲ ء

الفرق بين متجهين هندسياً

∵ و ٲ + ٲ ب = و ب فإن : ٲ ب = و ب – و ٲ = ب – ٲ

المتجهات والإحداثيات :

متجها الوحدة الاساسيان : س ، ص

س هو متجه موضع للنقطة (١ ، ٠) ، ص هو متجه موضع للنقطة (٠ ، ١)

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

المتجه ٲ = (س ، ص) بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

ٲ = س س + ص ص

فمثلاً ب = (٢ ، ٣) = ٢ س + ٣ص ، ء = (٠ ، ٥) = ٥ ص

إذا كان : $\overleftarrow{م}$ = (٣ ، ـ ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{جـ}$ = $\overleftarrow{س}$ ـ ٥ $\overleftarrow{ص}$

أوجد: بدلالة متجهى الوحدة :(١) ٢ $\overleftarrow{م}$ + ٣ $\overleftarrow{جـ}$ (٢) ٢ $\overleftarrow{جـ}$ ـ ($\overleftarrow{م}$ + $\overleftarrow{ب}$) (٣) $\overleftarrow{جـ ب}$

الحـــــــل

$\overleftarrow{م}$ = (٣ ، ـ ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ٠) ، $\overleftarrow{جـ}$ = (١ ، ـ ٥)

(١) ٢ $\overleftarrow{م}$ + ٣ $\overleftarrow{جـ}$ = ٢ (٣ ، ـ ٢) + ٣ (١ ، ـ ٥)

= (٦ ، ـ ٤) + (٣ ، ـ ١٥) = (٩ ، ـ ١٩)

بدلالة متجهى الوحدة = ٩ $\overleftarrow{س}$ ـ ١٩ $\overleftarrow{ص}$

(٢) ٢ $\overleftarrow{جـ}$ ـ ($\overleftarrow{م}$ + $\overleftarrow{ب}$) = ٢ (١ ، ـ ٥) ـ [(٣ ، ـ ٢) + (٣ ، ٠)]

= (٢ ، ـ ١٠) ـ (٦ ، ـ ٢) = (ـ ٤ ، ـ ٨)

بدلالة متجهى الوحدة = ـ ٤ $\overleftarrow{س}$ ـ ٨ $\overleftarrow{ص}$

(٣) $\overleftarrow{جـ ب}$ = $\overleftarrow{ب}$ ـ $\overleftarrow{جـ}$ = (٣ ، ٠) ـ (١ ، ـ ٥) = (٢ ، ٥)

بدلالة متجهى الوحدة = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$

تعريف معيار المتجه (طول المتجه)

إذا كان : $\overleftarrow{م}$ = (س ، ص) فإن العدد الحقيقى $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ يسمى معيار المتجه $\overleftarrow{م}$

متجه الوحدة $\overleftarrow{س}$ = (١ ، ٠) لأن || $\overleftarrow{س}$ || = $\sqrt{١ + ٠}$ = ١ وحدة طول

|| $\overleftarrow{س}$ || = || $\overleftarrow{ص}$ || = ١ وحدة طول

أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

$\overleftarrow{م}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ ـ ١٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ـ ٦) ، $\overleftarrow{جـ}$ = ($\sqrt{٧}$ ، ٣)

الحـــــــل

|| $\overleftarrow{م}$ || = $\sqrt{٥^٢ + ١٢^٢}$ = $\sqrt{٢٥ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ وحدة طول

|| $\overleftarrow{ب}$ || = $\sqrt{٣^٢ + ٦^٢}$ = $\sqrt{٩ + ٣٦}$ = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

|| $\overleftarrow{جـ}$ || = $\sqrt{٧ + ٣^٢}$ = $\sqrt{٧ + ٩}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدة طول

القـــــوى

تعريف القوة :- هى تأثير أحد الاجسام الطبيعية على جسم طبيعى أخر

أنواع القوى :-

(١) قوى شد (٢) قوى ضغط

(٣) قوة وزن (٤) قوة رد فعل

خواص القوة :-

يتوقف تأثير القوة على

١ـ مقدار القوة ٢ـ أتجاه القوة ٣ـ نقطة تأثير القوة

أولا مقدار القوة

هو مقدار ما تحتوية من وحدات القوة و اهم هذه الوحدات .

أولا : الوحدات التثاقلية : ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم = $١٠^{٣}$ ث جم

ثانيا : الوحدات المطلقة : ١ نيوتن = ١٠٠ ٠٠٠ داين = $١٠^{٥}$ داين

ثالثا : ترتبط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة :

١ ث كجم = ٩.٨ نيوين ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين [مالم يذكر خلاف ذلك]

ثانيا أتجاه القوة :-

هو إتجاه المتجه الذى تمثله هذه القوة يتحدد بقياس الزاوية القطبية لمتجه القوة .

الزاوية القطبية : هى الزاوية التى يصنعها خط عمل القوة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (هـ) و هى دائما فى عكس عقاب الساعة (اى دائما موجبة)

ثالثا نقطة التأثير وخط عملها :-

لكل قوة نقطة تؤثر فيها وخط عمل تعمل فيه

قاعدة أتزان جسم تحت تأثير قوتين

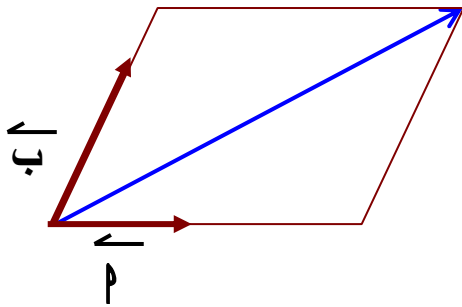
لكى يتزن جسم تحت تأثير قوتين يجب أن تكونان متساويتان فى المقدار ومتضادتان فى الاتجاه [وبالتالى تكون محصلة القوتين = صفر]

محصلة قوتين

تعريف المحصلة:-

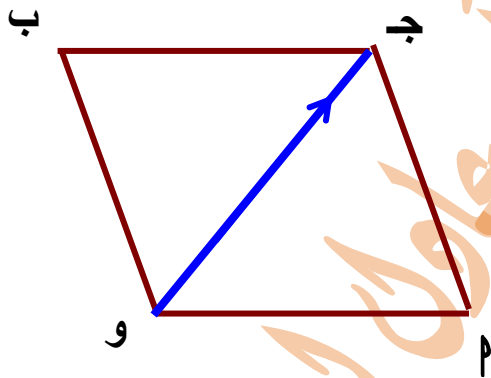
هى القوة التى تحدث نفس التأثير الذى تحدثة عدة قوى على الجسم

تعيين المحصلة :-

لتعيين المحصلة تعيينا تأما يجب تعين مقدارها وأتجاهها وتوجد طريقتان

(١) الطريقة البيانية :-

إذا أمكن تمثيل قوتان بضلعين متجاورين من
أضلاع متوازى أضلاع خارجين من نقطة واحدة
تمثيلا تاما فان محصلتهما تمثل مقدارا وأتجاها
بقطر متوازى الاضلاع الخارج من نفس النقطة

مثـــال : قوتان مقدارهما ٣٠، ٤٠ ث جم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١١٠° أوجد بيانيا المحصلة والزاوية بين المحصلة والقوة الاول

الحـــــــل

بعمل مقياس رسم ١سم لكل ١٠ ث جم

و م = ٣سم ، و ب = ٤سم

ق(∠ م و ب) = ١١٠

نكمل متوازى الاضلاع وبالقياس بالمسطرة نجد

أن و جـ = ٤,٢ سم

∴ ع = ٤,٢ × ١٠ = ٤٢ ث جم

ق(∠ هـ) = ٦٦°

تعين محصلة قوتين جبريا (بالقانون)

إذا كانت ق_1 ، ق_2 تؤثران فى جسم الزاوية بين خطى عملهما ى فإن محصلتهما تتعين من القانونيين

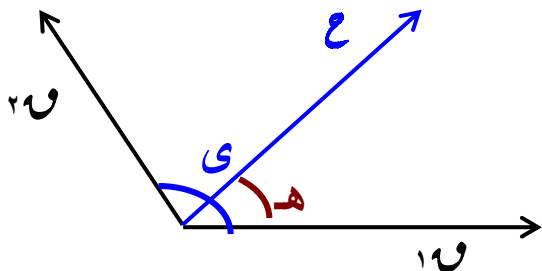
تتعين المحصلة من القانون

* $\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2\,\text{جتاى}$

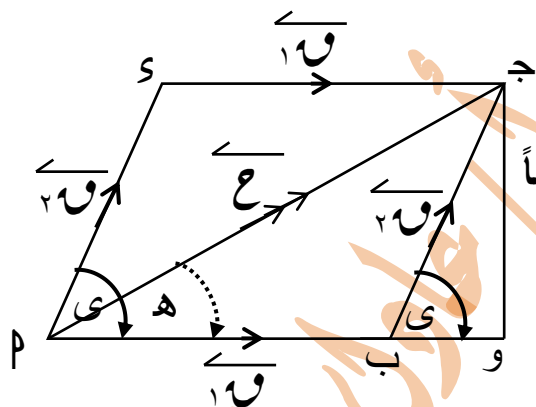
ويتعين اتجاه المحصلة من القانون

* $\text{ظاهـ} = \dfrac{\text{ق}_2\,\text{جاى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتاى}}$

حيث هـ الزاوية بين المحصلة والقوة الاولى

---

[٢] الطريقة البيانية :

إذا أثرت قوتان متلاقيتان فى نقطة و مثلهما تمثيلا تاماً ضلعان متجاوران من متوازى الأضلاع يبدأن من هذه النقطة فإن محصلتهما يمثلها تمثيلا تاما قطر متوازى الاضلاع الذى يبدأ من هذه النقطة .

فى الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ تمثلان $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ تمثيلا تاماً (مقدارا واتجاهاً و خط عمل) فإن :

$$\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} = (\text{ح} ، \text{هـ})$$

ح = مقدار المحصلة ، هـ هى الزاوية التى تصنعها المحصلة مع ق_1

بتطبيق قاعدة متوازى الاضلاع لجمع متجهين حيث هـ هى الزاوية الموجبة التى يصنعها $\overleftarrow{\text{ح}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (اتجاه ق_1)

مثـــال : قوتان مقدارهما $٨\sqrt{٣}$ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التى تصنعها مع القوة الاولى

الحـــــــل

$$ع^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ \; ق_{١} \; ق_{٢} \; \text{جتاى}$$

$$ع^{٢} = (٨\sqrt{٣})^{٢} + (٨)^{٢} + ٢ \times ٨\sqrt{٣} \times ٨ \; \text{جتا} ١٥٠^{\circ}$$

$$ع^{٢} = ٦٤ \qquad ع = \sqrt{٦٤} = ٨ \; \text{نيوتن}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{ق_{٢} \; \text{جاى}}{ق_{١} + ق_{٢} \; \text{جتاى}} = \frac{٨ \; \text{جا} ١٥٠}{٨\sqrt{٣} + ٨ \; \text{جتا} ١٥٠} = \frac{٨ \times \frac{١}{٢}}{٨\sqrt{٣} + ٨ \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢}}$$

$$= \frac{٤}{٤\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}} \qquad \therefore ق(\angle هـ) = ٣٠^{\circ}$$

∴ المحصلة ٨ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع القوة الاولى

مثـــال : قوتان مقدارهما ٥ ، $٥\sqrt{٢}$ نيوتن تؤثران فى قوة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التى تصنعها مع القوة الاولى

الحـــــــل

$$ع^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ \; ق_{١} \; ق_{٢} \; \text{جتاى}$$

$$ع^{٢} = (٥\sqrt{٢})^{٢} + (٥)^{٢} + ٢ \times ٥\sqrt{٢} \times ٥ \; \text{جتا} ٤٥^{\circ}$$

$$ع^{٢} = ١٢٥ \qquad ع = \sqrt{١٢٥} = ٥\sqrt{٥} \; \text{نيوتن}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{ق_{٢} \; \text{جاى}}{ق_{١} + ق_{٢} \; \text{جتاى}} = \frac{٥\sqrt{٢} \; \text{جا} ٤٥^{\circ}}{٥ + ٥\sqrt{٢} \; \text{جتا} ٤٥^{\circ}} = \frac{٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}{٥ + ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}$$

$$= \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢} \qquad \therefore ق(\angle هـ) = ٢٦^{\circ} \; ٣٤'$$

∴ المحصلة ٨ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٣٠ ° مع القوة الاولى

مثـــال : قوتان مقدارهما ١٠ ، ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى قوة مادية فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فأوجد قياس الزاوية بين القوتين

الحـــــــل

$ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتاى

$(١٠)^٢ = (١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢ + ٢ × ١٠ × ١٠\sqrt{٣}$ جتاى

$١٠٠ = ١٠٠ + ٣٠٠ + ٢٠٠\sqrt{٣}$ جتاى

$-٣٠٠ = ٢٠٠\sqrt{٣}$ جتاى

جتاى $= \frac{-٣}{٢\sqrt{٣}} = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ق ($\angle$ ى) $= ١٥٠°$

مثـــال : قوتان مقدارهما ٢٠ ، ١٠ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° عين محصلتهما تعيينا تاما

الحـــــــل

$ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتاى

$ع^٢ = (٢٠)^٢ + (١٠)^٢ + ٢ × ٢٠ × ١٠$ جتا١٢٠ $= ٣٠٠$

∴ $ع = \sqrt{٣٠٠} = \sqrt{١٠٠ × ٣} = ١٠\sqrt{٣}$

ظاهـ $= \frac{ق_٢ \text{ جاى}}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتاى}} = \frac{١٠ \text{ جا}١٢٠°}{٢٠ + ١٠ \text{ جتا}١٢٠°}$

$= \frac{١٠ × \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٢٠ + ١٠ × \frac{-١}{٢}} = \frac{٥\sqrt{٣}}{١٥} = \frac{\sqrt{٣}}{٣} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ ق($\angle$ هـ) $= ٣٠°$

∴ المحصلة $١٠\sqrt{٣}$ وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع القوة الاولى

مثـــال : قوتان مقدارهما ق ، $\sqrt{٣}$ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكان مقدار المحصلة يساوى ٢ ق نيوتن أوجد قياس الزاوية بين القوتين

الحـــــــل

ع^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ جتاى

(٢ ق)^٢ = ق^٢ + ($\sqrt{٣}$ ق)^٢ + ٢ ق × $\sqrt{٣}$ ق جتاى

٤ ق^٢ = ق^٢ + ٣ ق^٢ + ٢ $\sqrt{٣}$ ق^٢ جتاى

٤ ق^٢ = ٤ ق^٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ق^٢ جتاى

٠ = ٢ $\sqrt{٣}$ ق^٢ جتاى ∴ جتاى = ٠ ∴ ق(∠ ى) = ٩٠°

مثـــال :أوجد مقدار وأتجاه محصلة القوتين ق$_١$ ، ق$_٢$ إذا كانت ق$_١$ = ٧٥٠ نيوتن ، ق$_٢$ = ٥٠٠ نيوتن وكانت الزاوية بينهما ٦٠°

الحـــــــــل

ع^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ جتاى

=(٧٥٠)^٢ + (٥٠٠)^٢ + ٢ × ٧٥٠ × ٥٠٠ جتا٦٠

=١١٨٧٥٠٠ ع =$\sqrt{١١٨٧٥٠٠}$ = ١٠٨٩,٧٢

ظاهـ = $\frac{\text{ق}_٢ \text{ جاى}}{\text{ق}_١ + \text{ق}_٢ \text{ جتاى}}$ = $\frac{٥٠٠ \text{ جا}٦٠}{٧٥٠ + ٥٠٠\text{جتا}٦٠}$ = $\frac{٢٥٠\sqrt{٣}}{١٠٠٠}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$

∴ ق(∠ هـ) = ٢٤′ ٢٣°

مثـــال : قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية الزاوية بينهما ١٣٥°
إذا كان أتجاه محصلتهما يميل بزاوية ٤٥° على القوة ق أوجد قيمة ق

الحـــــــــل

ق$_١$ = ق ، ق$_٢$ = ٤ ى = ١٣٥°

∵ ظاهـ = $\frac{\text{ق}_٢ \text{ جاى}}{\text{ق}_١ + \text{ق}_٢ \text{ جتاى}}$

ظا٤٥ = $\frac{٤ \text{ جا}١٣٥}{\text{ق} + ٤ \text{ جتا}١٣٥}$ = $\frac{٤ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}{\text{ق} + ٤ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}}$ = ١

$\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ = ق - $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ ∴ ق = $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$ = ٤$\sqrt{٢}$

ع ، ٤ ، ٤٥° ، ق

مثـــال : قوتان أحداهما ضعف الاخرى فى المقدار ولهما محصلة . ما فإذا ضوعف مقدار القوة الكبرى وزيد مقدار القوة الصغرى بمقدار ٤ ث جم فان محصلتهما تظل فى نفس الاتجاه

الحـــــــل

أولاً :نفرض القوتان: ق ، ٢ ق ثانياً القوتان: ق+٤ ، ٤ ق

$$ظاهـ_١ = \frac{٢ ق جاى}{ق + ٢ ق جتاى} \qquad ظاهـ_٢ = \frac{٤ ق جاى}{(ق+٤)+٤ ق جتاى}$$

وحيث الاتجاه ثابت فى الحالتين ∴ ظاهـ١ = ظاهـ٢

$$∴ \frac{٢ ق جاى}{ق + ٢ ق جتاى} = \frac{٤ ق جاى}{(ق+٤)+٤ ق جتاى}$$

⇐ ٢ ق + ٤ ق جتاى = ق+٤ + ٤ ق جتاى

⇐ ٢ ق = ق + ٤ ∴ ق = ٤ ∴ القوتان هما ٤ ، ٨

مثـــال :قوتان مقدارهما ٧ ، ١٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الاولى أوجد قياس الزاوية بين القوتين ومقدار محصلتهما

الحـــــــل

$$ظا ٩٠ = \frac{١٤ جاى}{٧ + ١٤ جتاى} = \frac{١}{٠} \Leftarrow ٧ + ١٤ جتاى = ٠$$

١٤ جتاى = ـ ٧

$$\Leftarrow جتاى = \frac{-٧}{١٤} = \frac{-١}{٢} \qquad ∴ ق(\angle ى) = ١٢٠^\circ$$

$$ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتاى$$

$$ع^٢ = (٧)^٢ + (١٤)^٢ + ٢ \times ٧ \times ١٤ \times \frac{-١}{٢}$$

$$ع^٢ = ٤٩ + ١٩٦ - ٩٨ = ١٤٧$$

$$∴ ع = \sqrt{١٤٧} = \sqrt{٤٩ \times ٣} = ٧\sqrt{٣}$$

مثـــال : قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٦ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإذا كان خط عمل محصلتهما عموديا على القوة الاولى أوجد قيمة ق

الحـــــــــل

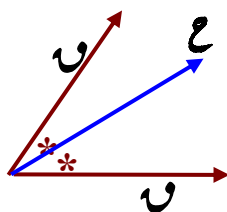
$$\text{ظاهـ} = \frac{ق_٢ \text{ جاى}}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتاى}} \qquad \therefore \text{ظا}٩٠ = \frac{ق \text{ جا}١٢٠}{٦ + ق \text{ جتا}١٢٠} = \frac{١}{٠}$$

$$\Leftarrow ٦ + ق \text{ جتا}١٢٠ = ٠ \qquad \Leftarrow ق \text{ جتا}١٢٠ = -٦$$

$$\Leftarrow ق \times -\frac{١}{٢} = -٦ \qquad \therefore ق = -٦ \times -٢ = ١٢ \text{ نيوتن}$$

حالات خاصة

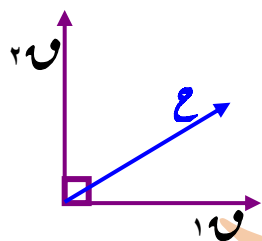
(١) إذا كانت القوتان متساويتان فى المقدار

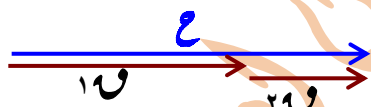
(وخط عملهما ليس على استقامة واحدة)

$$ع = ٢ ق \text{ جتا} \frac{ى}{٢}$$

والمحصلة تنصف الزاوية بين القوتين أى أن $هـ = \frac{ى}{٢}$

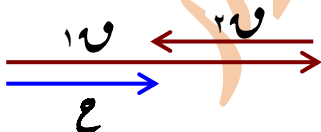
(٢) إذا كانت القوتان متعامدتان فان

$$ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ \Leftarrow ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$$

، $\text{ظاهـ} = \frac{ق_٢}{ق_١}$

(٣) إذا كانت القوتان لهما نفس الاتجاه

$$ع = ق_١ + ق_٢$$

وأتجاه المحصلة فى نفس أتجاه القوتين (المحصلة نهاية عظمى)

(٤) إذا كانت القوتان متضادتان فى الاتجاه

$$ع = |ق_١ - ق_٢|$$

وأتجاه المحصلة فى نفس أتجاه القوة الكبرى (المحصلة نهاية صغرى)

مثـــال : قوتان متعامدتان مقدارهما ٣٠ ، ٤٠ ث جم عين محصلتهما تعيينا تاما

الحـــــــل

$\because$ القوتان متعامدتان $\therefore$ $ع^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢$

$\therefore$ $ع^٢ = (٣٠)^٢ + (٤٠)^٢ = ٩٠٠ + ١٦٠٠ = ٢٥٠٠$

$\therefore$ $ع = \sqrt{٢٥٠٠} = ٥٠$ ث جم

ظاهـ $= \frac{\sqrt{ق_٢}}{\sqrt{ق_١}} = \frac{٤٠}{٣٠} = \frac{٤}{٣}$ $\therefore$ ق($\angle$ هـ) = ٧َ ٥٣°

مثـــال : قوتان مقدارهما ١٠ ، ٢٠ ث جم تؤثران فى نقطة مادية خط عملهما على أستقامة واحدة أوجد محصلتهما إذا كانت

(١) القوتان لهما نفس الاتجاه (٢) القوتان متضادتان فى الاتجاه

الحـــــــل

(١) إذا كانت القوتان لهما نفس الاتجاه $\therefore$ $ع = ق_١ + ق_٢ = ١٠ + ٢٠ = ٣٠$

وأتجاه المحصلة فى نفس أتجاه القوتين

(٢)إذا كانت القوتان متضادتان فى الاتجاه $\therefore$ $ع = |ق_١ - ق_٢| = |١٠ - ٢٠| = ١٠$

وأتجاه المحصلة فى أتجاه القوة ٢٠

مثـــال : قوتان مقدارهما ١٥ ، ١٠ تؤثران فى نقطة مادية وخط عملهما على أستقامة واحدة أوجد (١) النهاية العظمى للمحصلة وأتجاهها

(٢) النهاية الصغرى للمحصلة وأتجاهها

الحـــــــل

النهاية العظمى للمحصلة $\therefore$ $ع = ق_١ + ق_٢ = ١٥ + ١٠ = ٢٥$ ث جم

وأتجاه المحصلة فى نفس أتجاه القوتين

النهاية الصغرى للمحصلة $\therefore$ $ع = |ق_١ - ق_٢| = |١٥ - ١٠| = ٥$ ث جم

وأتجاه المحصلة فى نفس أتجاه القوة ١٥

مثـــال : قوتان ١٠ ، ١٠ ث جم تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بين خطى عملهما ١٢٠° أوجد مقدار محصلتهما وحدد أتجاهها

الحـــــــــل

∵ القوتان متساويتان ∴ ع = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ = ٢ × ١٠ جتا ٦٠ = ٢٠ × $\frac{١}{٢}$

∴ ع = ١٠ ث جم وأتجاه المحصلة ينصف الزاوية بين القوتين

مثـــال : ثلاث قوى مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٤ $\sqrt{٧}$ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية والزاوية بين القوة الاولى والثانية ٦٠° أوجد القيمتين العظمى والصغرى لمحصلة القوتين

الحـــــــــل

أولاً: نوجد محصلة القوتين ٥ ، ١٠

ع^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ جتاى

∴ ع^٢ = ٢٥ + ١٠٠ + ٢ × ٥ × ١٠ جتا ٦٠ = ١٧٥ ⟸ ع = $\sqrt{١٧٥}$ = ٥ $\sqrt{٧}$

ثانياً: نوجد محصلة القوتين ٥ $\sqrt{٧}$ ، ٤ $\sqrt{٧}$

النهاية العظمى لهما ع = ق$_١$ + ق$_٢$ = ٥ $\sqrt{٧}$ + ٤ $\sqrt{٧}$ = ٩ $\sqrt{٧}$

النهاية الصغرى لهما ع = ق$_١$ − ق$_٢$ = ٥ $\sqrt{٧}$ − ٤ $\sqrt{٧}$ = $\sqrt{٧}$

مثـــال : قوتان ق، ٥ $\sqrt{٢}$ ق تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ٢ $\sqrt{٦١}$ وقياس الزاوية بينهما ٤٥° أوجد قيمة ق

الحـــــــــل

ع^٢ = ق$_١^٢$ + ق$_٢^٢$ + ٢ ق$_١$ ق$_٢$ جتاى

٤ × ٦١ = ق^٢ + ٢٥ × ٢ ق^٢ + ٢ × ق × ٥ $\sqrt{٢}$ ق جتا٤٥

٢٤٤ = ق^٢ + ٥٠ ق^٢ + ١٠ $\sqrt{٢}$ ق^٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٢٤٤ = ٥١ ق^٢ + ١٠ ق^٢ = ٦١ ق^٢

∴ ق^٢ = $\frac{٢٤٤}{٦١}$ = ٤ ∴ ق = ٢

مثـــال : قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ق ، ٢ ق الزاوية بينهما ٦٠° فإذا علم أن مقدار محصلتهما $٢\sqrt{١٩}$ أوجد قيمة : ق

الحـــــــل

∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتاى

$٤ \times ١٩ = ٩ ق^٢ + ٤ ق^٢ + ٢ \times ٣ ق \times ٢ ق$ جتا٦٠

$٧٦ = ١٣ ق^٢ + ١٢ ق^٢ \times \frac{١}{٢} = ١٣ ق^٢ + ٦ ق^٢$

⟸ $٧٦ = ١٩ ق^٢$ ∴ $ق^٢ = ٤$ ∴ $ق = ٢$

مثـــال : قوتان ق ، $\sqrt{٢}$ ق تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية ظلها = ـ ١ ومقدار محصلتهما = ٤ نيوتن أوجد

(١) معيار ق (٢) زاوية ميل المحصلة على القوة الاولى

الحـــــــل

∵ ظاى = ـ ١ ∴ ق(∠ ى) = ١٣٥°

∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتاى

⟸ $١٦ = ق^٢ + ٢ق^٢ + ٢ ق \times \sqrt{٢} ق \times$ جتا١٣٥° $= ٣ ق^٢ + ٢\sqrt{٢} ق^٢ \times \frac{-١}{\sqrt{٢}}$

⟸ $١٦ = ٣ق^٢ - ٢ ق^٢$ ∴ $١٦ = ق^٢$ ∴ ق = ٤ نيوتن

ظاهـ $= \frac{ق_٢ \text{ جاى}}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتاى}} = \frac{٤\sqrt{٢} \text{ جا١٣٥°}}{٤ + ٤\sqrt{٢} \text{ جتا١٣٥}} = \frac{٤}{٠}$ ∴ ق(∠ هـ) = ٩٠°

مثـــال : قوتان النسبة بين مقداريهما ١ : $\sqrt{٢}$ وخط عمل محصلتيهما يميل على القوة الكبرى بزاوية ٤٥° أوجد قياس الزاوية بينهما ثم أوجد مقدار كلا منهما إذا علم أن مقدار محصلتهما $٣\sqrt{٢}$

الحـــــــل

نفرض القوتان ق ، $\sqrt{٢}$ ق المحصلة تميل بزاوية ٤٥° على القوة $\sqrt{٢}$ ق

ظاهـ $= \frac{ق_٢ \text{ جاى}}{ق_١ + ق_٢ \text{ جتاى}}$ ⟸ ظا٤٥° $= \frac{ق \text{ جاى}}{\sqrt{٢} ق + ق \text{ جتاى}} = ١$

⇐ ق جاى = $\sqrt{2}$ ق + ق جتاى ⇐ جاى – جتاى = ٢ بالتربيع

جا^2 ى + جتا^2 ى – ٢ جاى جتاى = ٢ ⇐ ١ – جا ٢ى = ٢

⇐ جا ٢ى = -١ ∴ ٢ى = ٢٧٠ ∴ ى = ١٣٥°

القوة الصغرى = ق = ٣$\sqrt{2}$ ، القوة الكبرى = $\sqrt{2}$ ق = $\sqrt{2}$ × ٣$\sqrt{2}$ = ٦

ح^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ جتاى

(٣$\sqrt{2}$)^2 = ق^2 + ($\sqrt{2}$ ق)^2 +٢ ق × $\sqrt{2}$ ق جتا١٣٥°

٩ × ٢ = ٣ق^2 + ٢$\sqrt{2}$ ق^2 × $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

١٨ = ٣ ق^2 – ٢ ق^2 = ق^2 ∴ ق = $\sqrt{18}$ = ٣$\sqrt{2}$

مثـــال : قوتان إذا كانت الزاوية بينهما قائمة كان مقدار محصلتهما يساوى $\sqrt{10}$ نيوتن وإذا كانت الزاوية بينهما ٦٠° كان مقدار محصلتهما يساوى $\sqrt{13}$ نيوتن فما هو مقدار كلا من القوتين

الحـــــــــل

∵ ح^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ جتاى

فى الحالة الاولى: ى = ٩٠° ، ح = $\sqrt{10}$ ∴ ١٠ = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ --- (١)

فى الحالة الثانية ى = ٦٠° ح = $\sqrt{13}$

١٣ = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ جتا٦٠ = ١٠+ ٢ ق$_1$ ق$_2$ × $\frac{1}{2}$

∴ ٣= ق$_1$ ق$_2$ --- (٢)

⇐ (ق$_1$ + ق$_2$)^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ = ١٠ + ٢ × ٣ = ١٦

∴ ق$_1$ + ق$_2$ = ٤ ق$_1$ = ٤ – ق$_2$ من(٢) (٤ – ق$_2$) ق$_2$= ٣

ق$_2^2$ – ٤ ق$_2$ + ٣ = (ق$_2$ – ١)(ق$_2$ – ٣) = ٠

ق$_2$ = ١ ، ق$_2$ = ٣ أ، ق$_1$ = ٣ ، ق$_1$ = ١

مثـــال : قوتان متعامدتان مقدار أحدهما $\frac{3}{4}$ مقدار الاخرى ومقدار محصلتهما ٢٠ نيوتن أوجد مقدار كلا منهما أوجد قياس الزاوية بينهما إذا أصبح مقدار المحصلة ٤$\sqrt{13}$ نيوتن

الحـــــــــل

نفرض أن القوتان ق ، $\frac{٣}{٤}$ق ، ∵ القوتان متعامدتان: ∴ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢$

$٤٠٠ = ق^٢ + \frac{٩}{١٦}ق^٢$ بالضرب × ١٦ ⇐ $٤٠٠ × ١٦ = ١٦ ق^٢ + ٩ ق^٢$

$٤٠٠ × ١٦ = ٢٥ ق^٢$ ⇐ $ق^٢ = ٢٥٦$ ∴ ق = ١٦

ويكون القوتان هما ١٦ ، ١٢

لايجاد ى: $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتاى

١٦ × ١٣ = ٢٥٦ + ١٤٤ + ٢ × ١٦ × ١٢ جتاى

٢٠٨ ـ ٤٠٠ = ٣٨٤ جتاى ⇐ ـ ١٩٢ = ٣٨٤ جتاى

جتاى = $\frac{-١}{٢}$ ∴ ق (∠ى) = ١٢٠°

مثـــال : قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ومقدار محصلتهما ح والزاوية بينهما ١٢٠° وإذا عكس أتجاه $ق_٢$ فان مقدار المحصلة يساوى $\sqrt{٣}$ ح إثبت أن $ق_١ = ق_٢$ وأن المحصلة فى الحالة الثانية يكون أتجاهها عموديا على أتجاه المحصلة فى الحالة الاولى .

الحـــــل

$ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتاى

الحالة الاولى $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا١٢٠°

$ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ - ق_١ ق_٢$ --- (١)

الحالة الثانية $٣ ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا٦٠°

$٣ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ق_١ ق_٢$ ----- (٢) بضرب المعادلة (١) × ٣

$٣ح^٢ = ٣ق_١^٢ + ٣ق_٢^٢ - ٣ ق_١ ق_٢$ ---- (٣)

$٣ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ق_١ ق_٢$ ----- (٢) بطرح (٢) من (٣)

$٠ = ٢ ق_١^٢ + ٢ ق_٢^٢ - ٤ ق_١ ق_٢$ بالقسمة ÷٢

$ق_١^٢ + ق_٢^٢ - ٢ ق_١ ق_٢ = ٠$ بالتحليل $(ق_١ - ق_٢)^٢ = ٠$

$ق_١ - ق_٢ = ٠$ ∴ $ق_١ = ق_٢$ ∴ القوتان متساويتان فى الحالتين

∴ المحصلة تنصف الزاوية بينهما فى الحالتين

الزاوية بين ح ، ٣ ح = ٦٠° + ٣٠° = ٩٠°

مثـــال : قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن والزاوية بينهما ١٢٠° أوجد قيمة ق فى الحالات الاتية (١) المحصلة = ق (٢) أتجاه المحصلة يميل بزاوية ٤٥° على القوة الثانية (٣) أتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية (٤) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

الحـــــــل

(١) المحصلة : ح = ق ∴ ح^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ +٢ ق$_1$ ق$_2$ جتاى

⟸ ق^2 = ٤ + ق^2 + ٢×٢×ق جتا١٢٠° ⟸٢ق = ٤ ∴ ق = ٢

(٢) المحصلة عمودية على الثانية ∴ ظا٩٠ = $\frac{\text{٢جا١٢٠}}{\text{ق+٢جتا١٢٠}}$ = $\frac{١}{٠}$

⟸ ق + ٢ جتا١٢٠° = ٠ ⟸ ق – ١ = ٠ ∴ ق = ١

(٣) المحصلة تصنع ٤٥° مع القوة الثانية ∴ظا٤٥ = $\frac{\text{٢جا١٢٠}}{\text{ق +٢ جتا١٢٠}}$ = ١

⟸ ١ = $\frac{\sqrt{٣}}{\text{ق – ١}}$ ⟸ ق – ١ = $\sqrt{٣}$ ∴ ق = $\sqrt{٣}$ + ١

(٤) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

⟸ القوتان متساويتان ∴ ق = ٢ نيوتن

تمارين على القوى

[١] اختر الاجابة الصحيحة من بين الاقواس :

(١) قوتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن و قياس الزاوية بينهما ٩٠° فإن مقدار محصلتهما تساوى .... نيوتن [١٠ ،أ ٥ ،أ ٧ ،أ ١٢]

(٢) قوتان متساويتان و مقدار كل منهما ٥ نيوتن و مقدار محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى .... [٠° ،أ ٩٠° ،أ ١٢٠ ،أ ١٨٠°]

(٣) قوتان متساويتان فى المقدار و متعامدتان و محصلتهما ٨ نيوتن فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن [٤ ،أ ٨ ،أ ٢$\sqrt{٢}$ ،أ ٤$\sqrt{٢}$]

(٤) قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن و قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن ق = ... نيوتن [٢ ،أ ٤ ،أ ٨ ،أ ٤$\sqrt{٢}$]

[٢] قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث كجم تؤثران فى نقطة مادية إذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث . كجم أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين .

[٣] قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية و ظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{-٣}{٤}$ أوجد مقدار و محصلتهما و قياس زاوية ميلها على القوة الأولى .

[٤] قوتان ق ، ٢ ق تؤثران فى نقطة مادية و تحصران بينهما زاوية ظلها = - ١ و مقدار محصلتهما = ٤ نيوتن أوجد : (أ) معيار ق (ب) زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى .

[٥] قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن و الزاوية بينهما قياسها ١٢٠ ° أوجد قيمة ق من الحالات

(١) مقدار المحصلة تساوى ق [٢ نيوتن]

(٢) اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية [١ نيوتن]

(٣) اتجاه المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥ ° على القوة الثانية [$\sqrt{٣}$ + ١ نيوتن]

(٤) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين [٢ نيوتن]

[٦] قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$ ومقدار محصلتهما ح و الزاوية ١٢٠ ° و إذا عكس اتجاه $ق_٢$ فإن مقدار المحصلة يساوى ح $\sqrt{٣}$ أثبت أن $ق_١ = ق_٢$ و أن المحصلة فى الحالة الثانية يكون اتجاهها عمودية على اتجاه المحصلة فى الحالة الاولى

[٧] قوتان تؤاثران فى نقطة مادية و ظل الزاوية بينهما يساوى $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ إذا علم أن محصلتهما عمودية على الصغرى و أن مقدار القوة الكبرى يساوى ٣٠ نيوتن فما هو مقدار كل من القوة الأخرى و المحصلة .

[٨] أوجد مقدار كل من القوتين إذا كان:

(١) أكبر قيمة لمحصلتهما = ٢٠ نيوتن ، و أصغر قيمة لمحصلتهما = ٤ نيوتن

(٢) القوتان متعامدتان و أحدهما تساوى ثلاثة ارباع الاخرى و محصلتهما ٢٠ ث جم

[٩] قوتان النسبة بين مقدارهما ١: $\sqrt{٢}$ و خط عمل محصلتهما يميل على القوة الكبرى بزاوية ٤٥ ° أوجد قياس الزاوية بينهما ثم أوجد مقدار كلاهما إذا علم أن مقدار محصلتهما ٣$\sqrt{٢}$

[١٠] قوتان مقدارهما ١٠ ، ٢٠ ث جم تؤاثران فى نقطة مادية خط عملهما على استقامة واحدة أوجد محصلهما إذا كانت : (١) القوتان لهما نفس الاتجاه (٢) القوتان متضادتان فى الاتجاه

تحليل قوة فى إتجاهين

لتحليل قوة ع الى قوتين ق$_1$ ، ق$_2$ فى أتجاهين مختلفين بالقانون

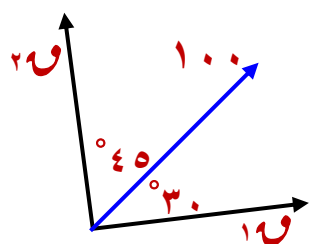
$$\frac{ق_1}{جا هـ_2} = \frac{ق_2}{جا هـ_1} = \frac{ع}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$$

حالة خاصة

لتحليل قوة ق فى إتجاهين متعامدين كما بالشكل

ق$_1$ = ع جتاهـ ، ق$_2$ = ع جاهـ

مثـــال : حلل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن فى إتجاهين يميل أولهما على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° والاخرى بزاوية قياسها ٤٥° فى الناحية الاخرى .

الحـــــــــل

$$\frac{ق_1}{جا هـ_2} = \frac{ق_2}{جا هـ_1} = \frac{ع}{جا(هـ_1 + هـ_2)}$$

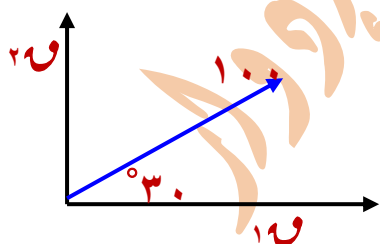
$$\Leftarrow \quad \frac{ق_1}{جا ٤٥} = \frac{ق_2}{جا ٣٠} = \frac{ع}{جا ٧٥}$$

$$ق_1 = \frac{١٠٠ \ جا ٤٥}{جا ٧٥} = ٧٣,٢ \text{ نيوتن} \quad ، \quad ق_2 = \frac{١٠٠ \ جا ٣٠}{جا ٧٥} = ٥١,٨ \text{ نيوتن}$$

مثـــال : حلل القوة ١٠٠ نيوتن فى إتجاهين متعامدين أحدهما يصنع مع أتجاه القوة بزاوية قياسها ٣٠°

الحـــــــــل

$$ق_1 = ١٠٠ \ جتا ٣٠ = ١٠٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٥٠\sqrt{٣} \text{ نيوتن}$$

$$ق_2 = ١٠٠ \ جا ٣٠ = ١٠٠ \times \frac{١}{٢} = ٥٠ \text{ نيوتن}$$

مثـــال : جسم مقدار وزنه ٢٠ نيوتن موضوع على مستوى يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠ أحسب مركبتى الوزن فى أتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه .

الحـــــــل

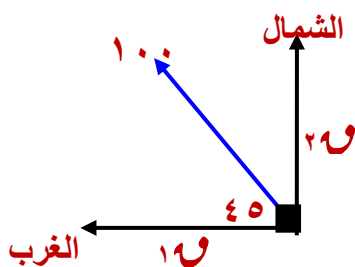
ق١ = ٢٠ جتا٣٠ = ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

ق٢ = ٢٠ جا٣٠ = ٢٠ × $\frac{١}{٢}$ = ١٠ نيوتن

مثـــال : قوة مقدارها ١٠٠ ث جم تعمل فى أتجاه الشمال الغربى . أحسب مركبتيها فى أتجاهى الشمال والغرب .

الحـــــــل

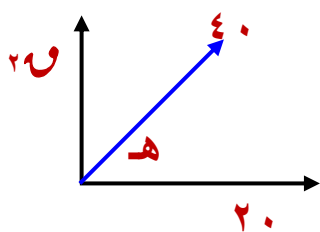
ق١ = ١٠٠ جتا٤٥ = ١٠٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٥٠ $\sqrt{٢}$ ث. جم

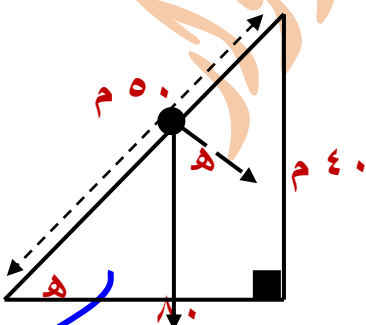
ق٢ = ١٠٠ جا٤٥ = ١٠٠ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٥٠ $\sqrt{٢}$ ث. جم

مثـــال : حللت قوة مقدارها ٤٠ ث كجم الى مركبتين متعامدتين أحدهما ٢٠ ث كجم فما مقدار المركبة الاخرى .

الحـــــــل

٢٠ = ٤٠ جتاهـ ∴ جتاهـ = $\frac{٢٠}{٤٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ هـ) = ٦٠°

المركبة الثانية = ٤٠ جا٦٠° = ٤٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$

مثـــال : مستوى مائل طوله ٥٠ م و ارتفاعه ٤٠ م وضع عليه جسم وزنه ٨٠ ث كجم أوجد مقدار مركبتي الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى و الاتجاه العمودى عليه .

الحـــــــل

المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل = ٥٠ حا هـ

= ٥٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٤٠ ث كجم

المركبة فى الاتجاه العمودى = ٥٠ حتا هـ

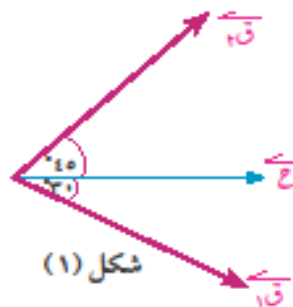
= ٥٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣٠ ث كجم

تمارين على تحليل قوة معلومة

[١] أكمل ما يأتي:

١) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تُساوى .... نيوتن.

٢) قوة مقدارها ٤ $\sqrt{2}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

٣) في شكل (١):

أ إذا حلِّلت القوة $\overrightarrow{ح}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٣٠° ، ٤٥° من جهتيها وكان || $\overrightarrow{ح}$ || = ١٢ نيوتن ،

فإن: ق١ = ... نيوتن ، ق٢ = ... نيوتن.

٤) في شكل (٢):

أ إذا حلِّلت القوة $\overrightarrow{ح}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٤٥° ، ٩٠° من كلتا جهتيها وكان

|| $\overrightarrow{ح}$ || = ١٨ نيوتن ، فإن: ق١ = ... نيوتن ، ق٢ = ... نيوتن

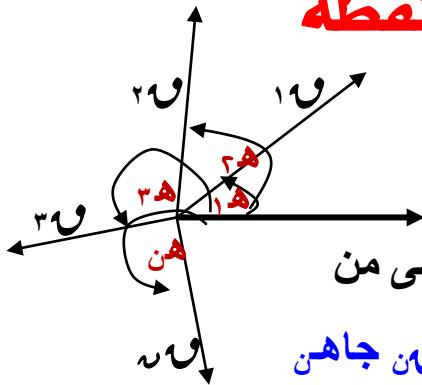
شكل (٢)

[٢] حلل قوة مقدارها ١٢ ث كجم تؤثر فى اتجاه الشمال الشرقى الى مركبتين إحداهما تؤثر نحو الشرق والاخرى نحو الشمال الغربى . أوجد مقدارهاتين المركبتين

[٣] حلل قوة مقدارها ٤٠ نيوتن فى اتجاهين متعامدين احدهما يميل على الافقى بزاوية ٦٠° الى أسفل .

[٤] جسم وزنه ٢٠ نيوتن موضوع على مستوى يميل على الافقي بزاوية قياسها ٣٠ احسب مركبتي الوزن (و) فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى و الاتجاه العمودى علية

[٥] قوة مقدارها ق تؤثر فى اتجاه ٣٠ جنوب الشرق حللت الى مركبتين متعامدين احداهما تؤثر نحو الشرق و مقدارها ٢٥ $\sqrt{3}$ ث جم . أوجد ق و مقدار و اتجاه المركبة الاخرى

محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة

إذا أثرت عدة قوى $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، .... ، $ق_ن$ فى جسم وهذه القوى تصنع زوايا $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ، $هـ_٣$ .... $هـ_ن$ فان

- مجموع مركبات هذه القوى فى أتجاه محور السينات تعطى من

القانون: $س = ق_١ جتاهـ_١ + ق_٢ جتاهـ_٢ + ... + ق_ن جتاهـ_ن$

- مجموع مركبات هذه القوى فى أتجاه محور الصادات تعطى من

القانون: $ص = ق_١ جاهـ_١ + ق_٢ جاهـ_٢ + ... + ق_ن جاهـ_ن$

- وتكون محصلة هذه القوى

$$\overleftarrow{ح} = (\sum ق_ر حتا هـ_ر)\,\overleftarrow{س} + (\sum ق_ر حا هـ_ر)\,\overleftarrow{ص}$$

$$= س\,\overleftarrow{س} + ص\,\overleftarrow{ص} = (ح ، هـ)$$

أى أن : $ح^٢ = س^٢ + ص^٢$ ، $ح = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$

، $ظا هـ = \frac{ص}{س}$ حيث $هـ \in [٠ ، ٢ط [$

لاحظ : الفرق بين س ، $\overleftarrow{س}$

س = المجموع الجبرى لمركبات القوى فى الاتجاه الموجب لمحور السينات

$\overleftarrow{س}$ = هو متجه وحدة فى الاتجاه الموجب لمحور السينات و كذلك ص ، $\overleftarrow{ص}$

مثـــال : أثرت قوى مقاديرها ١٦ ، ٤ ، $٨\sqrt{٣}$ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فى نقطة مادية فى أتجاهات الشرق ، ٦٠° شمال الشرق ، ٦٠° غرب الجنوب ، الجنوب على الترتيب أوجد محصلة هذه القوى

الحـــــــــل

القوة	١٦	٤	$٨\sqrt{٣}$	$٤\sqrt{٣}$
الزاوية	٠	٦٠	٢١٠	٢٧٠

$س = ١٦ جتا ٠ + ٤ جتا ٦٠ + ٨\sqrt{٣} جتا ٢١٠ + ٤\sqrt{٣} جتا ٢٧٠$

= ١٦ × ١ + ٤ × ١/٢ + ٨√٣ × -√٣/٢ + ٤√٣ × صفر

س = ١٦+٢ – ١٢ + ٠ = ٦

ص = ١٦ جا٠ + ٤ جا٦٠ + ٨√٣ جا٢١٠ + ٤√٣ جا٢٧٠

= ١٦×٠ + ٤ × √٣/٢ + ٨√٣ × -١/٢ + ٤√٣ × -١

= ٠ + ٢√٣ – ٤√٣ – ٤√٣ = – ٦√٣

ح→ = (٦ ، – ٦√٣)

ح = √((٦)² + (-٦√٣)²) = √(٣٦ + ١٠٨) = √١٤٤ = ١٢ نيوتن

ظاهـ = -٦√٣/٦ = -√٣ ق(هـ) = ٣٠٠°

المحصلة تساوى ١٢ نيوتن وتصنع ٣٠٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

مثـــال : تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨√٣ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين الاولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٦٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠°
أوجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية التى تصنعها مع القوة الاولى

الحـــــل

القوة	٢	٤	٦	٨√٣
الزاوية	٠	٦٠	١٢٠	٢١٠

س = ٢جتا٠ + ٤ جتا٦٠ + ٦جتا١٢٠ + ٨√٣جتا٢١٠

= ٢ × ١ + ٤ × ١/٢ + ٦ × -١/٢ + ٨√٣ × -√٣/٢

= ٢ + ٢ – ٣ – ١٢ = – ١١

ص = ٢جا٠ + ٤ جا٦٠ + ٦ جا١٢٠ + ٨√٣ جا٢١٠

= ٢ × ٠ + ٤ × √٣/٢ + ٦ × √٣/٢ + ٨√٣ × -١/٢

= ٢√٣ + ٣√٣ – ٤√٣ = √٣

∴ ح→ = (-١١ ، √٣)

∴ ح = √((-١١)² + (√٣)²) = √١٢٤ ظاهـ = -√٣/١١ ∴ ق(هـ) = ١٧١° ٣

مثـــال : $ا ب جـ ء$ مستطيل فيه $ا ب$ = ٦سم، $ب جـ$ = ٨سم أخذت نقطة هـ ∋ $\overleftarrow{ب جـ}$ بحيث ب هـ = ٦سم أثرت قوى مقاديرها ١ ، ١٠ ، $٥\sqrt{٢}$ ، ٣ ث جم فى $\overleftarrow{ا ء}$ ، $\overleftarrow{ا جـ}$ ، $\overleftarrow{ا هـ}$ ، $\overleftarrow{ا ب}$ على الترتيب أوجد مقدار محصلة هذه القوى

الحـــــــل

القوة	٣	$٥\sqrt{٢}$	١٠	١
الزاوية	٠	٤٥	ى	٩٠

س = ٣جتا٠ + $٥\sqrt{٢}$ جتا٤٥ + ١٠ جتاى + ١ جتا٩٠

= ٣ × ١ + $٥\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ١٠ × $\frac{٦}{١٠}$ + ١ × ٠

= ٣ + ٥ + ٦ = ١٤

ص = ٣جا٠ + $٥\sqrt{٢}$ جا٤٥ + ١٠ جاى + ١ جا٩٠

= ٣ × ٠ + $٥\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ١٠ × $\frac{٨}{١٠}$ + ١ × ١

= ٠ + ٥ + ٨ + ١ = ١٤

$\overleftarrow{ع}$ = (١٤ ، ١٤)

ع = $\sqrt{(١٤)^٢ + (١٤)^٢}$ = $\sqrt{١٩٦ + ١٩٦}$ = $١٤\sqrt{٢}$

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١٤}{١٤}$ = ١ هـ = ٤٥°

مثـــال : أثرت قوى مقاديرها ق ، $٤\sqrt{٣}$ ، $١٢\sqrt{٣}$ ، ٣٦ ث جم فى نقطة مادية وكانت الثلاث قوى الاخيرة فى أتجاهات الشمال ، ٦٠° غرب الشمال ، ٦٠° جنوب الشرق على الترتيب فإذا كانت محصلة هذه القوى = ٨ ث جم فى أتجاه الشرق فعين ق

الحـــــــل

القوة	ق	$٤\sqrt{٣}$	$١٢\sqrt{٣}$	٣٦
الزاوية	هـ	٩٠	١٥٠	٣٠٠

ع = ٨ ث جم فى أتجاه الشرق   ع = (٨ ، ٠)

٨ = ق جتاهـ + ٤ $\sqrt{3}$ جتا ٩٠ + ١٢ $\sqrt{3}$ جتا ١٥٠ + ٣٦ جتا ٣٠٠

٨ = ق جتا هـ + ٤ $\sqrt{3}$ × ٠ + ١٢ $\sqrt{3}$ × $\frac{-\sqrt{3}}{٢}$ + ٣٦ × $\frac{١}{٢}$

٨ = ق جتاهـ + ٠ ـ ١٨ + ١٨ ⟸ ق جتاهـ = ٨ (١)

٠ = ق جاهـ + ٤ $\sqrt{3}$ جا ٩٠ + ١٢ $\sqrt{3}$ جا ١٥٠ + ٣٦ جا ٣٠٠

٠ = ق جاهـ + ٤ $\sqrt{3}$ × ١ + ١٢ $\sqrt{3}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٣٦ × $\frac{-\sqrt{3}}{٢}$

٠ = ق جاهـ + ٤ $\sqrt{3}$ + ٦ $\sqrt{3}$ ـ ١٨ $\sqrt{3}$

٠ = ق جاهـ - ٨ $\sqrt{3}$ ⟸ ق جاهـ = ٨ $\sqrt{3}$ ---- (٢)

بقسمة ٢ على ١ $\frac{\text{ق جاهـ}}{\text{ق جتاهـ}}$ = $\frac{٨\sqrt{3}}{٨}$

ظاهـ = $\sqrt{3}$ ∴ ق(∠هـ) = ٦٠°

ق جتا ٦٠ = ٨   ∴ ق × $\frac{١}{٢}$ = ٨   ∴ ق = ١٦

مثـــال : أثرت قوى مقاديرها ق ، ك ، ٦ نيوتن فى نقطة مادية فى أتجاهات الشرق ، الشمال ، ٣٠° جنوب الغرب على الترتيب فإذا كانت محصلة القوى = ٨ وتعمل فى أتجاه ٣٠° شمال الشرق عين قيمة ق ، ك

الحـــــــــل

القوة	ق	ك	٦
الزاوية	٠	٩٠	٢١٠

$\overleftarrow{ع}$ = (٨ جتا ٣٠ ، ٨ جا ٣٠) = (٤ $\sqrt{3}$ ، ٤)

السينى = س = $٤\sqrt{٣}$ = ق جتا٠ + ك جتا٩٠ + ٦ جتا٢١٠

$٤\sqrt{٣}$ = ق + ك × ٠ + ٦ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = ق − $٣\sqrt{٣}$ ∴ ق = $٧\sqrt{٣}$

الصادى = ص = ٤ = ق جا٠ + ك جا٩٠ + ٦ جا٢١٠

٤ = ق × ٠ + ك × ١ + ٦ × $\frac{-١}{٢}$ = ٠ + ك − ٣ ∴ ك = ٧

مثـــال : أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب هـ = $٤\sqrt{٣}$ سم أثرت قوى مقاديرها ٥ ، $٤\sqrt{٣}$ ، $٣\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{٣}$ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ على الترتيب أوجد مقدار وأتجاه محصلة هذه القوى

الحـــــــــل

القوة	$٢\sqrt{٣}$	٥	$٣\sqrt{٢}$	$٤\sqrt{٣}$
الزاوية	٢٧٠	١٨٠	٤٥	ى

س = $٢\sqrt{٣}$ جتا٢٧٠ + ٥ جتا١٨٠ + $٣\sqrt{٢}$ جتا٤٥ + $٤\sqrt{٣}$ جتاى

س = $٢\sqrt{٣}$ × ٠ + ٥ × -١ + $٣\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $٤\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = −٥ + ٣ + ٦ = ٤

ص = $٢\sqrt{٣}$ جا٢٧٠ + ٥ جا١٨٠ + $٣\sqrt{٢}$ جا٤٥ + $٤\sqrt{٣}$ جاى

ص = $٢\sqrt{٣}$ × −١ + ٥ × ٠ + $٣\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $٤\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = $-٢\sqrt{٣}$ + ٣ + $٢\sqrt{٣}$ = ٣

∴ $\overleftarrow{ح}$ = (٤ ، ٣) ح = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

∴ ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣}{٤}$ ق(∠ هـ) = ٣٦° ٥٢′

المحصلة = ٥ نيوتن وخط عملها يصنع زاوية قياسها ٣٦° ٥٢′ مع $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

مثـــال : جسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ث جم على الترتيب أوجد قياس الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة

الحـــــــــل

نعتبر القوة ٥ هى محصلة القوتين ١٠ ، ٥ $\sqrt{٣}$

$$ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتاى}$$

$$٢٥ = (١٠)^2 + (٥\sqrt{٣})^2 + ٢ \times ١٠ \times ٥\sqrt{٣} \text{ جتاى}$$

$$٢٥ = ١٠٠ + ٧٥ + ١٠٠\sqrt{٣} \text{ جتاى}$$

$$٢٥ - ١٠٠ - ٧٥ = ١٠٠\sqrt{٣} \text{ جتاى}$$

$$-١٥٠ = ١٠٠\sqrt{٣} \text{ جتاى}$$

$$\text{جتاى} = \frac{-١٥٠}{١٠٠\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{-١٥٠\sqrt{٣}}{٣٠٠} = \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\therefore ق (\angle ى) = ١٨٠^\circ - ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ$$

مثـــال : ؟ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ٢$\sqrt{٣}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{؟ب}$ ، $\overleftarrow{؟جـ}$ ، $\overleftarrow{؟ء}$ ، $\overleftarrow{؟هـ}$ على الترتيب عين المحصلة تعيينا تاما .

الحـــــــــل

القوة	٦	٢$\sqrt{٣}$	٦	٢$\sqrt{٣}$
الزاوية	٠	٣٠	٦٠	٩٠

$$س = ٦\text{جتا}٠ + ٢\sqrt{٣}\text{جتا}٣٠ + ٦\text{جتا}٦٠ + ٢\sqrt{٣}\text{جتا}٩٠$$

$$= ٦ \times ١ + ٢\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٦ \times \frac{١}{٢} + ٢\sqrt{٣} \times ٠$$

$$= ٦ + ٣ + ٣ + ٠ = ١٢$$

ص = ٦ جا ٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠ + ٦ جا ٦٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٩٠

= ٦ × ٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ١

= ٠ + $\sqrt{٣}$ + ٣ $\sqrt{٣}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ = ٦ $\sqrt{٣}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = (١٢ ، ٦ $\sqrt{٣}$)

ح = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٦\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{١٤٤ + ١٠٨}$ = $\sqrt{٢٥٢}$ = $\sqrt{٣٦ × ٧}$ = ٦ $\sqrt{٧}$

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{١٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ق (∠ هـ) = ٤٦′ ٥٠°

مثـــال : إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ = ٨ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = -١٠ $\overleftarrow{س}$ + ٢٤ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٤}$ = -٦ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_٥}$ = ١٥ $\overleftarrow{س}$ – ٨ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية أوجد محصلة هذه القوى مقدارا وأتجاها

الحـــــــل

$\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$ + $\overleftarrow{ق_٣}$ + $\overleftarrow{ق_٤}$ + $\overleftarrow{ق_٥}$

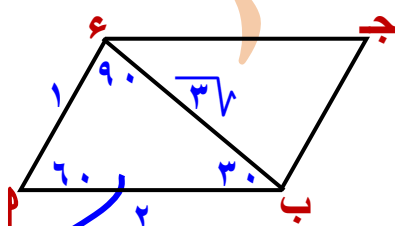
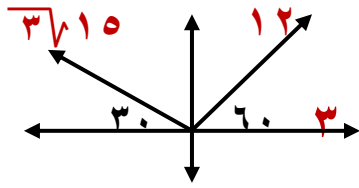
= ٨ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ – ١٠ $\overleftarrow{س}$ + ٢٤ $\overleftarrow{س}$ – ٦ $\overleftarrow{س}$ + ١٥ $\overleftarrow{س}$ – ٨ $\overleftarrow{ص}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ + ٢٤ $\overleftarrow{ص}$

∴ ‖ ح ‖ = $\sqrt{(٧)^٢ + (٢٤)^٢}$ = $\sqrt{٤٩ + ٥٧٦}$ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥

مثـــال : أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه ق(∠ أ ء ب) = ٩٠° ، أ ب = ٢ أ ء أثرت القوى التى مقاديرها ٣ ، ١٢ ، ١٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ أوجد مقدار وأتجاه المحصلة

ء جـ ٩٠ $\sqrt{٣}$ ١ ٦٠ ٣٠ أ ٢ ب

الحـــــــل

القوة	٣	١٢	١٥ $\sqrt{٣}$
الزاوية	٠	٦٠	١٥٠

س = ٣جتا٠ + ١٢ جتا٦٠ + $١٥\sqrt{٣}$ جتا١٥٠

= ٣(١) + ١٢ × $\frac{١}{٢}$ + $١٥\sqrt{٣}$ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

= ٣ + ٦ − ٢٢,٥ = −١٣,٥

١٥√٣   ١٢   ٣٠   ٦٠   ٣

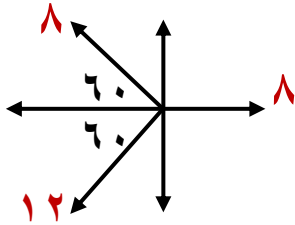
ص = ٣جا٠ + ١٢ جا٦٠ + $١٥\sqrt{٣}$ جا١٥٠

= ٣(٠) + ١٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $١٥\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = ٠ + $٦\sqrt{٣}$ + $٧,٥\sqrt{٣}$ = $١٣,٥\sqrt{٣}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = (−١٣,٥ ، $١٣,٥\sqrt{٣}$)

ح = $\sqrt{(-١٣,٥)^٢ + (١٣,٥\sqrt{٣})^٢}$ = ١٣,٥ × $\sqrt{٢}$ نيوتن

ظاهـ = $\frac{١٣,٥\sqrt{٣}}{-١٣,٥}$ = $-\sqrt{٣}$ ∴ ق (∠هـ) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

مثـــال : ثلاث قوى مقاديرها ٨ ، ٨ ، ١٢ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فى إتجاهات موازية لاضلاع مثلث متساوى الاضلاع مأخوذة فى ترتيب دوى واحد أوجد مقدار المحصلة واتجاهها

الحـــــــل

القوة	٨	٨	١٢
الزاوية	٠	١٢٠	٢٤٠

س = ٨ × ١ + ٨ × $\frac{-١}{٢}$ + ١٢ × $\frac{-١}{٢}$ = ٨ − ٤ − ٦ = −٢

ص = ٨(٠) + ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٢ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠ + $٤\sqrt{٣}$ − $٦\sqrt{٣}$ = $-٢\sqrt{٣}$

ح = (−٢ ، $-٢\sqrt{٣}$) ∴ ح = $\sqrt{(-٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

تمارين على محصلة عدة قوى

[١] إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ا $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ،
$\overleftarrow{ق_٣}$ = -١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و كانت المحصلة
ع = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) أوجد قيمة ا ، ب

[٢] أثرت القوى التى مقاديرها ٧ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٦ ، ٩ $\sqrt{٣}$ ث جم فى نقطة مادية
الاولى فى اتجاه الشرق ، الثانية فى اتجاه ٣٠ ° شمال الشرق ، الثالثة ٦٠ ° شمال الغرب ، الرابعة ٣٠ ° غرب الجنوب ، الخامسة فى اتجاه الجنوب أوجد المحصلة .

[٣] أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٣ ، ٦ ، ٩ $\sqrt{٣}$ ، ١٢ ث كجم فى نقطة مادية
و كان قياس الزاوية بين الأولى و الثانية ٦٠ و بين الثانية و الثالثة ٩٠ وبين الثالثة و الرابعة ١٥٠ أوجد مقدار و اتجاه محصلة القوى الاربعة .

[٤] اب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، م نقطة تلاقى متوسطاته أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ٨ ، ١٠ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{م جـ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م ا}$
أوجد مقدار و اتجاه محصلة هذه القوى .

[٥] اب جـ ء هـ و مسدس منتظم تؤثر القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث كجم فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{اجـ}$ ، $\overleftarrow{اء}$ ، $\overleftarrow{اهـ}$ ، $\overleftarrow{او}$ على الترتيب أوجد محصلة هذه القوى

[٦] اب جـ ء هـ و مسدس منتظم ، م هى نقطة تقاطع أقطاره تؤثر القوى ٤ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ث جم فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{م ا}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م جـ}$ ، $\overleftarrow{م ء}$ ، $\overleftarrow{م هـ}$ ، $\overleftarrow{م و}$
أوجد مقدار محصلة هذه القوى و أثبت أنها تؤثر فى اتجاه $\overleftarrow{م ء}$

[٧] اب جـ ء مستطيل فيه اب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم أثرت القوى ٢ ، ٥ ، ٣ ث كجم فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{اجـ}$ ، $\overleftarrow{اء}$ على الترتيب .
أوجد مقدار محصلة هذه القوى و قياس زاوية ميلها على اب

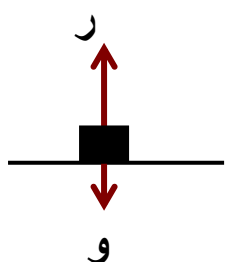
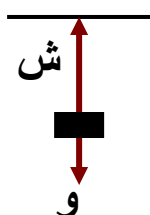
إتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

إتزان نقطة مادية (جسيم متناه فى الصغر) تحت تأثير قوتين :

قاعدة : إذا أتزن جسم تحت تأثير قوتين فقط كانت القوتان :-

(١) متساويتان فى المقدار
(٢) متضادتان فى الاتجاه
(٣) خط عملهما على أستقامة واحدة

من أمثلة توازن جسم تحت تأثير قوتين

(١) إذا علق ثقل (و) بحبل خفيف من نقطة فإنه يتزن
تحت تأثير قوتين هما وزن الجسم والشد فى الحبل

(٢) إذا وضع جسم على نضد أفقى أملس فإنه يتزن
تحت تأثير قوتين هما الوزن ورد فعل النضد على الجسم

قاعدتان هامتان

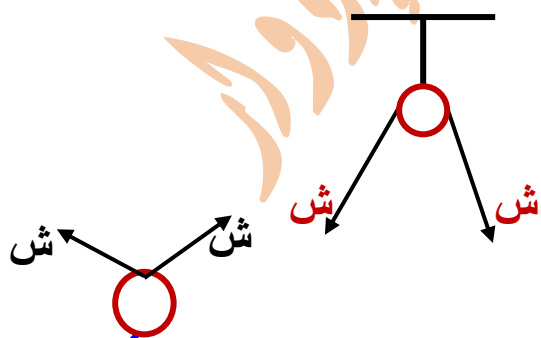
(١) إذا أثر على جسم متماسك قوتان متساويتان فى المقدار وفى إتجاهين متضادين وفى نفس الخط المستقيم فإنه لا يكون لهما أى تأثير على الجسم من ناحية السكون أو الحرك

(٢) القوى المتبادلة الناتجة عن تأثير جسم على أخر تكون دائما متساوية فى المقدار ومتضادة فى الاتجاه وهذا هو القانون الثالث لنيوتن والذى ينص على أنه

لكل فعل رد فعل مساوله فى المقدار ومضاد له فى الاتجاه

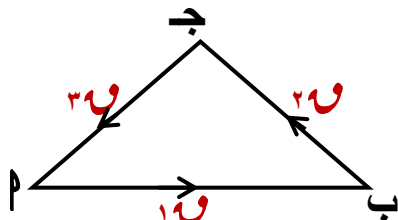
تنبيه

١- إذا مر خيط خفيف على بكرة ملساء فان مقدار الشد فى الخيط لا يتغير بمروره على البكرة

٢- إذا مر خيط خفيف فى حلقة ملساء فإن مقدار الشد فى الخيط لا يتغير بمروره داخل الحلقة

إتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى

[١] قاعدة مثلث القوى

إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى وفى أتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة

$$\frac{ق_1}{أب} = \frac{ق_2}{ب جـ} = \frac{ق_3}{أ جـ}$$

تستخدم إذا أمكن معرفة مقدار إحدى القوى الثلاث وعلمت أطوال أضلاع مثلث القوى (أو النسبة بين أطوال أضلاع مثلث القوى)

مثـــال : علق ثقل مقداره ١٠٠ ث جم بخيطين طوليهما ٣٠سم ، ٤٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ٥٠ سم . أوجد مقدار الشد فى كلا من الخيطين

الحــــــــل

من عكس فيثاغورث

$(أب)^2 = (٥٠)^2 = ٢٥٠٠$

$(أ جـ)^2 + (ب جـ)^2 = (٤٠)^2 + (٣٠)^2 = ٢٥٠٠$

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى جـ

قاعدة مثلث القوى : $\frac{ش_1}{جاهـ_1} = \frac{ش_2}{جاهـ_2} = \frac{١٠٠}{جا٩٠}$

$ش_1 = ١٠٠ جاهـ_1 = ١٠٠ \times ٠٫٣ = ٦٠$ ث جم

$ش_2 = ١٠٠ جاهـ_2 = ١٠٠ \times \frac{٤٠}{٥٠} = ٨٠$ ث جم

مثـــال : خيط خفيف طوله ٢٤سم ثبت طرفه أ فى نقطة ثابتة وعلق وزن مقداره ١٠٠ ث جم من طرفه الاخر ب أوجد مقدار القوة اللازمة لحفظ الوزن على بعد ١٢سم من الخط الافقى المار بنقطة أ إذا كانت القوة المؤثرة أفقية

الحــــــــل

القوة أفقية: Δ ؍ب جـ هو مثلث القوى

$(\text{؍ب})^2 = (٢٤)^2 - (١٢)^2 = ١٢ \times ٣٦$

$\therefore$ ؍ب = $١٢\sqrt{٣}$

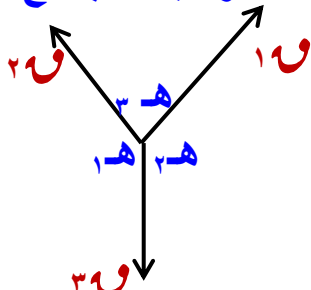
$\frac{١٠٠}{١٢} = \frac{ش_١}{٢٤} = \frac{ق}{١٢\sqrt{٣}}$

$ش_٢ = \frac{١٠٠ \times ٢٤}{١٢} = ٢٠٠$ ث جم ، $ق = \frac{١٠٠ \times ١٢\sqrt{٣}}{١٢} = ١٠٠\sqrt{٣}$ ث جم

---

[٢] قاعدة لامى:-

إذا أتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فان مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الاخريين

$$\frac{ق_١}{\text{جاهـ}_١} = \frac{ق_٢}{\text{جاهـ}_٢} = \frac{ق_٣}{\text{جاهـ}_٣}$$

يلاحظ أنه تستخدم إذا أمكن معرفة قياسات الزوايا بين خطوط القوى الثلاث

قاعدة هامة:- إذا إتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية بحيث التقى خط عمل قوتين منهما فى نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة لابد وأن يمر بنفس النقطة .

مثـــال : خيط خفيف طوله ٢٤سم ثبت طرفه ؍ فى نقطة ثابتة وعلق وزن مقداره ١٠٠ ث جم من طرفه الاخر ب أوجد مقدار القوة اللازمة لحفظ الوزن على بعد ١٢سم من الخط الافقى المار بنقطة ؍ إذا كانت القوة المؤثرة عمودية على ؍ب

الحـــــــــل

القوة عمودية على الخيط : قاعدة لامى

$$\frac{١٠٠}{\text{جا}٩٠} = \frac{ق_١}{\text{جا}١٢٠} = \frac{ش}{\text{جا}١٥٠}$$

$ق = ١٠٠ \text{ جا}١٢٠ = ١٠٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٥٠\sqrt{٣}$

$ش = ١٠٠ \text{ جا}١٥٠ = ١٠٠ \times \frac{١}{٢} = ٥٠$

مثـــال : علق جسم وزنه ٦,٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠,٥ متر ، ١,٢ متر وربط الخيطين في نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين .
أوجد مقدار الشد فى كلا من الخيطين

الحـــــــــل

(أب)^{٢} = (٥٠)^{٢} + (١٢٠)^{٢} = ١٦٩٠٠

∴ أب = ١٣٠ سم

$$\frac{ش_{١}}{جا(١٨٠ - هـ_{٢})} = \frac{ش_{٢}}{جا(١٨٠ - هـ_{١})} = \frac{٦,٥}{جا٩٠}$$

$$∴ \frac{ش_{١}}{جاهـ_{٢}} = \frac{ش_{٢}}{جاهـ_{١}} = ٦,٥$$

$$ش_{١} = ٦,٥ \, جاهـ_{٢} = ٦,٥ \times \frac{١٢٠}{١٣٠} = ٦ \text{ نيوتن}$$

$$ش_{٢} = ٦,٥ \, جاهـ_{١} = ٦,٥ \times \frac{٥٠}{١٣٠} = ٢,٥ \text{ نيوتن}$$

مثـــال :أزيحت كرة بندول وزنها ١ نيوتن حتى صار الخيط يصنع ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى أتجاه عمودى على الخيط ..... أوجد القوة والشد فى الخيط

الحـــــــــل

بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{ق}{جا١٥٠} = \frac{ش}{جا١٢٠} = \frac{١}{جا٩٠}$$

$$ق = ١ \times جا١٥٠ = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \text{ نيوتن}$$

$$ش = ١ \times جا١٢٠ = ١ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \text{ نيوتن}$$

مثـــال : علق وزن(و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويمر على بكرة صغيرة ملساء ويحمل فى نهايته الاخرى وزنا مقداره ١٢ نيوتن ويميل الثانى على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ويمر على بكرة صغيرة ملساء ويحمل فى نهايته الاخرى وزنا مقداره ٨ نيوتن أوجد مقدار الوزن (و) وقياس الزاوية هـ

الحـــــــل

بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{ش_١}{جا(١٨٠ - هـ)} = \frac{ش_٢}{جا١٥٠} = \frac{و}{جا(٣٠+هـ)}$$

$$\therefore \frac{٨}{جاهـ} = \frac{١٢}{جا١٥٠} = \frac{و}{جا(٣٠+هـ)}$$

$$جاهـ = \frac{٨ جا١٥٠}{١٢} = \frac{٨ \times \frac{١}{٢}}{١٢} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣} \quad \therefore ق(\angle هـ) = ٢٨' ١٩°$$

$$\Leftarrow \quad ٣٠ + هـ = ٣٠ + ٢٨' ١٩° = ٢٨' ٤٩°$$

$$\therefore و = \frac{١٢ جا(٣٠ + هـ)}{جا١٥٠} = \frac{١٢جا٢٨' ٤٩°}{جا١٥٠} = ١٨,٤ \text{ نيوتن}$$

مثـــال : جسم وزنه ٤٠٠ ث جم معلق من نقطة ﻡ بواسطة خيط . ربط خيط فى نقطة ب من الخيط وشد أفقيا بخيط ثان ب جـ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويتدلى فى نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ث جم .أوجد ميل ﻡب على الراسى والشد فى الخيطين ﻡ، ب

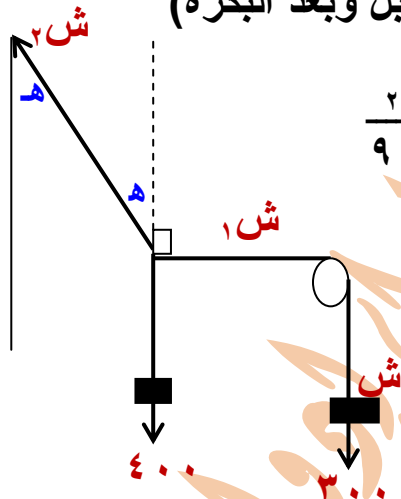
الحـــــــل

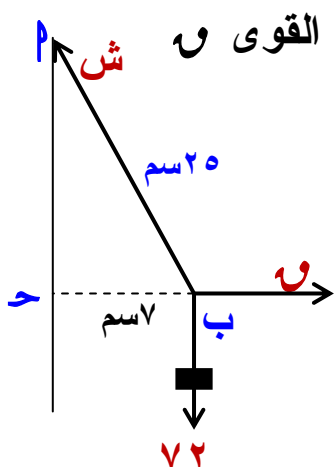
نظرا لان البكرة ملساء فان الشد فى طرفى الخيط متساو(قبل وبعد البكرة)

$$ش_١ = ٣٠٠ \quad \therefore \frac{٣٠٠}{جاهـ} = \frac{٤٠٠}{جا(٩٠+ هـ)} = \frac{ش_٢}{جا٩٠}$$

$$\therefore \frac{٣٠٠}{جاهـ} = \frac{٤٠٠}{جتاهـ} = ش_٢$$

$$\therefore \frac{جاهـ}{جتاهـ} = \frac{٣}{٤} \qquad ظاهـ = \frac{٣}{٤}$$

$$ش_٢ = \frac{٣٠٠}{جاهـ} = ٣٠٠ \times \frac{٥}{٣} = ٥٠٠$$

مثـــال : علق وزن مقداره ٧٢ ث جم فى أحد طرفى خيط وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ﻡ على حائط رأسى . ربط خيط ثان عند نقطة ب من الخيط الاول تبعد عن ﻡ مسافة = ٢٥سم وشد فى أتجاه أفقى حتى صارت النقطة ب تبعد عن الحائط ٧سم. أوجد قوة الشد فى الخيط الافقى وكلا من جزئى الخيط الثانى .

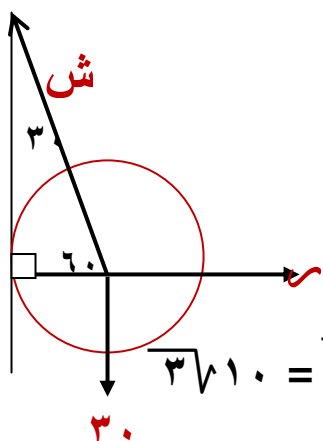
الحـــــــــــل

باستخدام قاعة مثلث القوى : ٯ ب لمثل الوزن ، جـ ب يمثل القوى ٯ

$$ٯجـ = \sqrt{(٢٥)^٢ - (٧)^٢} = ٢٤$$

$$\therefore \frac{ٯ}{٧} = \frac{ش}{٢٥} = \frac{٧٢}{٢٤}$$

$$\therefore ٯ = \frac{٧ \times ٧٢}{٢٤} = ٢١ \text{ ث جم}$$

$$، \quad ش = \frac{٢٥ \times ٧٢}{٢٤} = ٧٥ \text{ ث جم}$$

مثـــال : ربط أحد طرفى خيط فى نقطة على سطح كرة متجانسة وربط الطرف الاخر فى نقطة من حائط رأسى أملس فإذا أتزنت الكرة بحيث يلامس سطحها الحائط . أوجد الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة إذا علم أن وزنها ٣٠ ث جم ويؤثر فى مركزها وأن الخيط يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°

الحـــــــــــل

بتطبيق قاعدة لامى

$$\therefore \frac{ر}{جا ١٥٠} = \frac{ش}{جا ٩٠} = \frac{٣٠}{جا ١٢٠}$$

$$ر = \frac{٣٠ \, جا ١٥٠}{جا ١٢٠} = \frac{٣٠ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٣٠}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣٠\sqrt{٣}}{٣} = ١٠\sqrt{٣}$$

$$ش = \frac{٣٠ \, جا ٩٠}{جا ١٢٠} = \frac{٣٠ \times ١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦٠}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٦٠\sqrt{٣}}{٣} = ٢٠\sqrt{٣}$$

مثـــال : علق قضيب منتظم طوله متر ووزنه ٣٠ نيوتن من طرفيه بخيطين ثبت طرفيهما فى نقطة واحدة فى السقف فإذا كان الخيطين متعامدين وكان طول أحدهما ٦٠ سم فما هو مقدار الشد فى كلا من الخيطين عندما يكون القضيب معلقا تعليقا مطلقا وفى حالة أتزان

الحـــــــــــل

بتطبيق قاعدة لامى

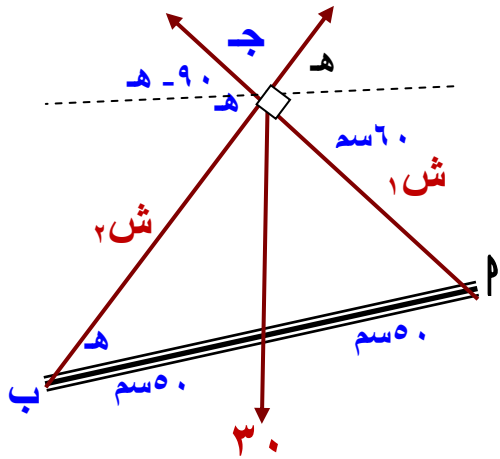
$$(ٯجـ)^٢ = (١٠٠)^٢ - (٦٠)^٢ = ٦٤٠٠$$

$$ٯجـ = ٨٠ \text{ سم}$$

$$\frac{ش_1}{جا(٩٠+هـ)} = \frac{ش_2}{جا(١٨٠ ـ هـ)} = \frac{٣٠}{جا٩٠}$$

$$\frac{ش_1}{جتاهـ} = \frac{ش_2}{جاهـ} = ٣٠$$

$$ش_1 = ٣٠ \text{ جتاهـ} = ٣٠ \times \frac{٨٠}{١٠٠} = ٢٤ \text{ ث جم}$$

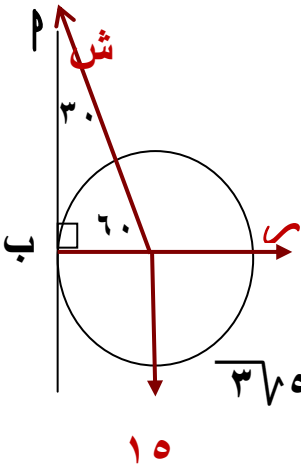
$$ش_2 = ٣٠ \text{ جاهـ} = ٣٠ \times \frac{٦٠}{١٠٠} = ١٨ \text{ ث جم}$$

مثـــال : كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط رأسى أملس ومعلقة بخيط مثبت أحد طرفيه من نقطة على سطحها وطرفه الاخر مربوط فى الحائط فى نقطة أعلى نقطة تماس الكرة تماما فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على الحائط والشد فى الخيط

الحـــــــــل

بتطبيق قاعدة لامى

$$\therefore \frac{ر}{جا١٥٠} = \frac{ش}{جا٩٠} = \frac{١٥}{جا١٢٠}$$

$$ر = \frac{١٥ \text{ جا١٥٠}}{جا١٢٠} = \frac{١٥ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١٥}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{١٥\sqrt{٣}}{٣} = ٥\sqrt{٣}$$

$$ش = \frac{١٥ \text{ جا٩٠}}{جا١٢٠} = \frac{١٥ \times ١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٣٠}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣٠\sqrt{٣}}{٣} = ١٠\sqrt{٣}$$

مثـــال : علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقا مطلقا فى خيطين مربوطين من نقطة واحدة وكان طول أحدهما ٥٠سم ، طول الاخر ١٢٠سم ما هو الوضع الذى يكون فيه القضيب متزنا وما هو مقدار الشد فى كلا من الخيطي

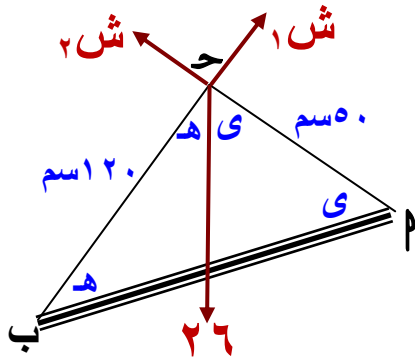
الحـــــــــل

$$(أ ب)^2 = (أ جـ)^2 + (ب جـ)^2$$

$$\therefore ق (\angle أ جـ ب) = ٩٠^\circ$$

$\frac{ش_١}{جاى} = \frac{ش_٢}{جاهـ} = \frac{٢٦}{جا٩٠}$

ش١ = ٢٦ جاى = ٢٦ × $\frac{١٢٠}{١٣٠}$ = ٢٤ نيوتن

ش٢ = ٢٦ جاهـ = ٢٦ × $\frac{٥٠}{١٣٠}$ = ١٠ نيوتن

مثـــال : قضيب منتظم أ ب يمكنه الدوران بغير عائق فى مستوى رأسى حول مفصل فى م ربط طرفه الاخر ب بخيط يمر على بكرة ملساء عند جـ م على م تماما ويحمل ثقلا يساوى نصف ثقل القضيب أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الافقى فى حالة التوازن إذا علم أن م جـ = م ب

الحـــــــل

ء منتصف م ب ، م ء // م جـ ∴ م منتصف ب جـ

م ب = م جـ ، م منتصف ب جـ

∴ م م ⊥ ب جـ ∴ Δ م م جـ هو مثلث القوى

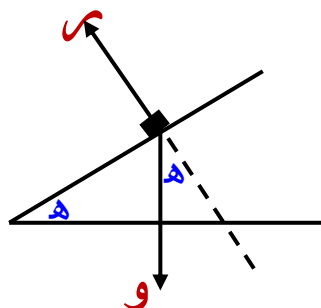
$\frac{ر}{م م} = \frac{و}{م جـ} = \frac{٢و}{م جـ}$

م جـ = ٢ م جـ م جـ = م جـ

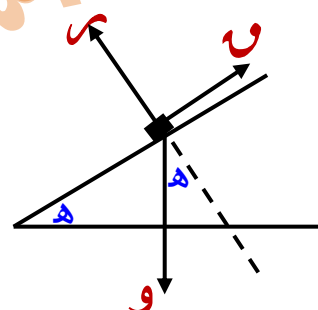
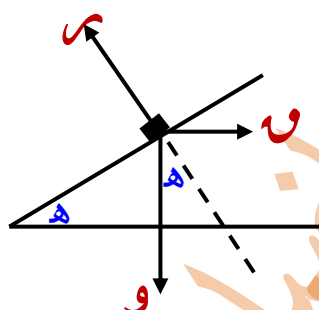
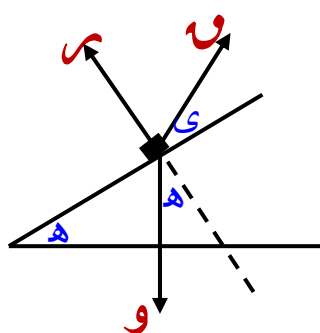
∴ ق (∠ م م جـ) = ٣٠° = ق (∠ م م ب)

∴ القضيب يصنع مع الافقى زاوية قياسها = ٩٠° ـ ٢ × ٣٠° = ٣٠°

[٣] اتزان جسم على مستوى مائل أملس:-

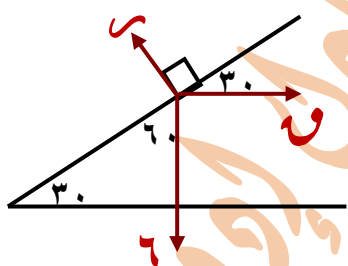
إذا وضع جسم وزنه (و) على مستو مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم يكون تحت تأثير قوتين :

١) قوة الوزن (و) واتجاهها رأسي الى أسفل

٢) قوة رد فعل المستوى الاملس (ر) عمودى على المستوى لأعلى

و لكى يتزن الجسم لابد من وجود قوة ثالثة تؤثر على الجسم فى أحد الحالات الاتية :

الجسم تؤثر عليه فى اتجاه خط أكبر ميل المستوى	الجسم تؤثر عليه قوة أفقية	الجسم تؤثر عليه قوة فى اتجاه يميل بزاوية ى لأعلى المستوى

مثـــال : وضع جسم وزنه ٦ ث كجم على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازنه بواسطة قوة أوجد هذه القوة ورد فعل المستوى فى الحالتين الاتيتين(أولا) القوة أفقية(ثانيا) القوة تميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠°

الحـــــــــل

(أولا) القوة أفقية: بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{ق}{جا ١٥٠} = \frac{ر}{جا ٩٠} = \frac{٦}{جا ١٢٠}$$

$$ق = \frac{٦ \; جا ١٥٠}{جا ١٢٠} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٣} \text{ ث.كجم}$$

$$ر = \frac{٦ \; جا ٩٠}{جا ١٢٠} = \frac{٦ \times ١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{١٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٤\sqrt{٣} \text{ ث.كجم}$$

(ثانيا) القوة تميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠°

بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{\text{ق}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}١٥٠} = \frac{٦}{\text{جا}٦٠}$$

$$\text{ق} = \frac{٦\ \text{جا}١٥٠}{\text{جا}٦٠} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٣}\ \text{ث.كجم}$$

$$\text{ر} = \frac{٦\ \text{جا}١٥٠}{\text{جا}٦٠} = \frac{٦ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = ٢\sqrt{٣}\ \text{ث.كجم}$$

مثـــال : وضع جسم وزنه ٦٠ نيوتن على مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° وشد الى أعلى المستوى بخيط فى أتجاه خط أكبر ميل للمستوى لاعلى أوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المستوى

الحـــــــــل

بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{\text{ش}}{\text{حا}١٥٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}١٢٠} = \frac{٦٠}{\text{جا}٩٠}$$

$$\text{ش} = ٦٠\ \text{جا}١٥٠ = ٦٠ \times \frac{١}{٢} = ٣٠\ \text{ث. جم}$$

$$\text{ر} = ٦٠\ \text{جا}١٢٠ = ٦٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٣٠\sqrt{٣}\ \text{ث. جم}$$

مثـــال : جسم فى حالة توازن على مستوى مائل أملس تحت تأثير قوة تعمل فى أتجاه المستوى إلى أعلى ومقدارها يساوى نصف مقدار وزن الجسم أوجد زاوية ميل المستوى على الافقى ورد فعل المستوى

الحـــــــــل

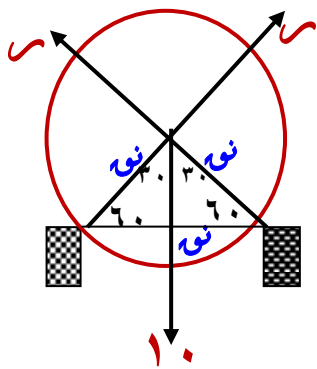
بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{\text{و}}{\text{جا}(١٨٠ - \text{هـ})} = \frac{٢\text{و}}{\text{جا}٩٠} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(٩٠ + \text{هـ})}$$

$$\frac{\text{و}}{\text{جاهـ}} = \frac{٢\text{و}}{١} = \frac{\text{ر}}{\text{جتاهـ}}$$

$\text{٢و جاهـ} = \text{و} \Leftarrow \text{٢جاهـ} = ١ \Leftarrow \text{جاهـ} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\text{و}(\angle \text{هـ}) = ٣٠^\circ$

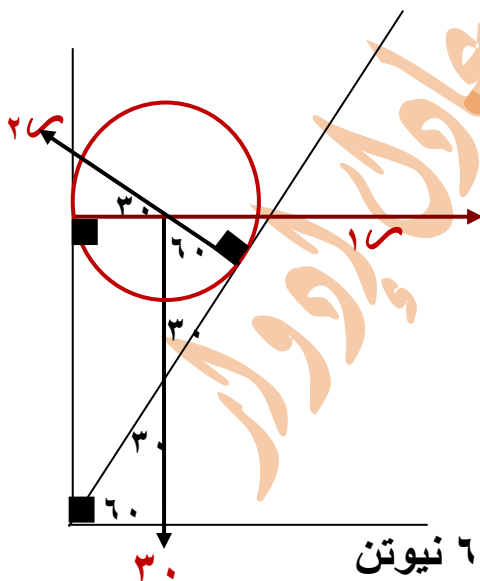
$\frac{\text{و}}{\text{جا٣٠}} = \frac{\text{ر}}{\text{جتا٣٠}}$ ∴ $\text{ر} = \frac{\text{و جتا٣٠}}{\text{جا٣٠}} = \text{و ظتا٣٠} = \sqrt{٣}\ \text{و}$

مثـــال : كرة مصمتة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد والبعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على كلا من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ١٠ نيوتن

الحــــــــل

بتطبيق قاعدة لامى ∴ $\frac{\text{ر}_١}{\text{جا١٥٠}} = \frac{\text{ر}_٢}{\text{جا١٥٠}} = \frac{١٠}{\text{جا٦٠}}$

$\text{ر}_١ = \text{ر}_٢ = \frac{\text{١٠جا١٥٠}}{\text{جا٦٠}} = \frac{١٠ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

$\text{ر}_١ = \text{ر}_٢ = \frac{١٠}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ نيوتن

مثـــال : كرة ملساء من الحديد وزنها ٣٠نيوتن مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٦٠° أوجد الضغط على كلا من الحائط والمستوى

الحــــــــل

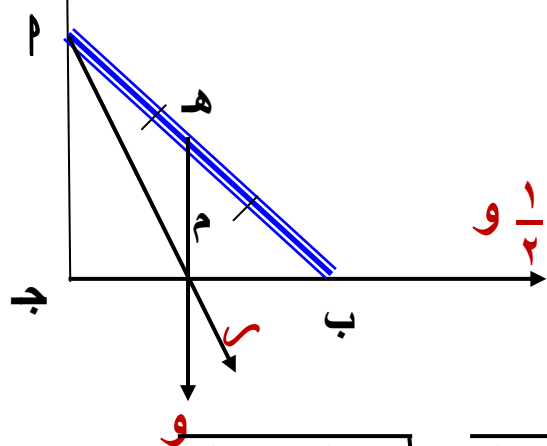
بتطبيق قاعدة لامى

$\frac{\text{ر}_١}{\text{جا١٢٠}} = \frac{\text{ر}_٢}{\text{جا٩٠}} = \frac{٣٠}{\text{جا١٥٠}}$

$\text{ر}_١ = \frac{\text{٣٠جا١٢٠}}{\text{جا١٥٠}} = \frac{٣٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٣٠\sqrt{٣}$ نيوتن

$\text{ر}_٢ = \frac{\text{٣٠ جا٩٠}}{\text{جا١٥٠}} = \frac{٣٠ \times ١}{\frac{١}{٢}} = ٣٠ \times ٢ = ٦٠$ نيوتن

مثـــال :ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شدت جانبا بقوة أفقية تؤثر فى طرفها الاخر وتساوى نصف ثقل الساق أوجد قياس زاوية ميل الساق على الرأسى عندما تتزن وكذلك رد الفعل عند الطرف الاو

الحـــــــل

Δ ؤ م جـ هو مثلث القوى

$$\frac{ر}{ؤ\ م} = \frac{و}{ؤ\ جـ} = \frac{\frac{1}{2}\ و}{م\ جـ}$$

∴ ؤجـ = ٢ م جـ = ٢ س

فى Δ ؤ م جـ

$$ؤ\ م = \sqrt{(ؤ\ جـ)^2 + (م\ جـ)^2} = \sqrt{(٢\ س)^2 + (س)^2} = \sqrt{٤س^2 + س^2}$$

$$= \sqrt{٥\ س^2} = \sqrt{٥}\ س$$

$$\frac{ر}{\sqrt{٥}\ س} = \frac{و}{٢س} \qquad ر = \frac{\sqrt{٥}}{٢}\ و$$

هـ منتصف $\overline{ؤ\ ب}$ ، $\overleftarrow{هـ\ م}$ // $\overleftarrow{ؤ\ جـ}$ ∴ م منتصف $\overline{ب\ جـ}$ ∴ ب م = م جـ

∴ ؤجـ = ب جـ ∴ ق (∠ ب ؤجـ) = ق (∠ ب ؤجـ) = ٤٥°

مثـــال : وضع قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن على مستويين أملسين متقابلين ويميلان على الافقى بالزاويتين ٣٠° ، ٦٠° بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين فى مستوى واحد أوجد مقدار الضغط على كلا من المستويين وكذا زاوية ميل القضيب على الافقى فى حالة التوازن

الحـــــــل

بتطبيق قاعدة لامى

$$\frac{ر_1}{جا ١٥٠} = \frac{ر_2}{جا ١٢٠} = \frac{٤}{جا ٩٠}$$

$$ر_1 = ٤\ جا ١٥٠ = ٤ \times \frac{١}{٢} = ٢ \text{ نيوتن}$$

$$ر_2 = ٤\ جا ١٢٠ = ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٢\sqrt{٣} \text{ نيوتن}$$

[٤] اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

قاعدة : نحلل كل قوة من القوى المعطاة الى مركبتين فى الاتجاهين الموجبين لمحورى الاحداثيات و تكون هما س~ ، ص~ على الترتيب ثم نضع س~ = ٠ ، ص~ = ٠ ثم نوجد المطلوب

*** نتيجة :**

شرط اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هو أن يتلاشى المجموع الجبرى للمركبات الجبرية لهذه القوى فى أى اتجاه .

أنه لكى تكون مجموعة من القوى المستوية و المتلاقية فى نقطة متزنة يجب أن تكون

ع = (مجـ ر ق ر حتا هـ ر) س~ + (مجـ ر ق ر حا هـ ر) ص~ = (٠،٠)

ويمكن التعبير عن شرط توازن مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هو س = صفر ، ص = صفر

مثـــال : إذا أتزنت مجموعة قوى مقاديرها ١٦ ، ٤ ، ٨ $\sqrt{3}$ ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ق نيوتن فى نقطة مادية فى أتجاهات الشرق ، ٦٠° شمال الشرق ، ٦٠° غرب الجنوب ، الجنوب ، ٣٠° شرق الجنوب على الترتيب فأوجد ق

الحـــــــل

القوة	١٦	ق١	٨ $\sqrt{3}$	٤ $\sqrt{3}$	ق٢
الزاوية	٠	٦٠	٢١٠	٢٧٠	١٢٠

∵ المجموعة متزنة فإن ع = (٠ ، ٠)

س = ١٦ جتا ٠ + ق١ جتا ٦٠ + ٨ $\sqrt{3}$ جتا ٢١٠ + ٤ $\sqrt{3}$ جتا ٢٧٠ + ق٢ جتا ١٢٠ = ٠

= ١٦ × ١ + ق١ × $\frac{1}{2}$ + ٨ $\sqrt{3}$ × $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ + ٤ $\sqrt{3}$ × ٠ + ق٢ × $\frac{-1}{2}$ = ٠ بالضرب × ٢

س = ٣٢ + ق١ − ٢٤ + ق٢ = ٠ ⟸ ق١ − ق٢ = − ٨ ---- (١)

ص = ١٦جا٠ + $ق_١$ جا٦٠+ ٨$\sqrt{٣}$جا٢١٠ + ٤$\sqrt{٣}$جا٢٧٠ + $ق_٢$ جا ١٢٠ =٠

= ١٦×٠ + $ق_١$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٨$\sqrt{٣}$ × $\frac{-١}{٢}$ + ٤$\sqrt{٣}$ × -١ + $ق_٢$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ =٠

= ٠ + $ق_١$ – ٨ – ٨ – $ق_٢$ = ٠ ⟸ $ق_١$ + $ق_٢$ = ١٦ ---- (٢)

بجمع (١) ، (٢) ٢ $ق_١$ = ٨ ∴ $ق_١$ = ٤ وبالتعويض فإن $ق_٢$ = ١٢

مثـــال : ٢ب جـ ء مستطيل فيه ٢ ب =٦سم،ب جـ = ٨سم أخذت نقطة هـ ∋ ب جـ بحيث ب هـ =٦سم أثرت قوى مقاديرها ١ ، ١٠ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٣ ، ق ث جم فى ٢ء ، ٢جـ ، ٢هـ ، ٢ب ، فإذا أتزنت المجموعة عين قيمة ق واتجاهها

الحـــــــــل

القوة	٣	٥$\sqrt{٢}$	١٠	١	ق
الزاوية	٠	٤٥	ى	٩٠	هـ

∵ المجموعة متزنة ∴ $\overleftarrow{ح}$ = (٠ ، ٠)

س = ٣جتا٠ +٥$\sqrt{٢}$جتا٤٥ +١٠ جتاى +١ جتا٩٠ + ق جتا هـ

= ٣ × ١ +٥$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ١٠ × $\frac{٦}{١٠}$ + ١ × ٠ + ق جتا هـ = ٠

= ٣ + ٥ + ٦ + ق جتا هـ = ٠ ⟸ ق جتا هـ = – ١٤ ----- (١)

ص = ٣جا٠ +٥$\sqrt{٢}$جا٤٥ +١٠ جاى +١ جا٩٠ + ق جا هـ = ٠

=٣ × ٠ + ٥$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ +١٠ × $\frac{٨}{١٠}$ +١ × ١ + ق جا هـ = ٠

= ٥ + ٨ +١ + ق جا هـ = ٠ ⟸ ق جا هـ = – ١٤ ----- (٢)

بقسمة (٢) ÷ (١) $\frac{جا هـ}{جتا هـ}$ = ظاهـ = $\frac{١٤}{١٤}$ = ١ هـ = ٤٥° ∴ ق = ١٤$\sqrt{٢}$

مثـــال : ٢ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى جـ فيه ٢ ء // ب جـ ، ب جـ = ١٨سم ، جـ ء =٨سم ، ٢ ء = ١٢سم أثرت قوى مقاديرها ١٠، $ق_١$ ، $ق_٢$ فى الاتجاهات ٢ ب ، جـ ء ، ب جـ على الترتيب أوجد $ق_١$ ، $ق_٢$ حتى تتزن المجموعة

الحـــــــــل

القوة	$ق_{٢}$	$ق_{١}$	١٠
الزاوية	٠	٩٠	١٨٠ + هـ

المجموعة متزنة $\overrightarrow{ح}$ = (٠ ، ٠)

الأتجاه السينى س = ٠ = $ق_{٢}$ جتا٠ + $ق_{١}$ جتا٩٠ + ١٠ جتا(١٨٠ – هـ)

٠ = $ق_{٢}$ × ١ + $ق_{١}$ × ٠ + ١٠ × $\frac{-٦}{١٠}$ = $ق_{٢}$ – ٦ ⟸ ∴ $ق_{٢}$ = ٦

الأتجاه الصادى ص = ٠ = $ق_{٢}$ جا٠ + $ق_{١}$ جا٩٠+١٠جا(١٨٠- هـ)

٠ = $ق_{٢}$ × ٠ + $ق_{١}$ × ١+١٠ × $\frac{-٨}{١٠}$ = $ق_{١}$ – ٨ ⟸ ∴ $ق_{١}$ = ٨

مثـــال : أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٣٠ ، ق ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٤٥ ث كجم فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق وغرب الشمال بزاوية قياسها هـ ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب فإذا كانت هذه المجموعة متزنة أوجد قيمتى ق ، هـ

الحــــــــــل

القوة	٣٠	ق	٥$\sqrt{٢}$	٤٥
الزاوية	٠	٩٠ +هـ	٢٢٥	٢٧٠

المجموعة متزنة ∴ $\overrightarrow{ح}$ = صفر = (٠ ، ٠)

س = ٠ = ٣٠ جتا٠ + ق جتا(٩٠+هـ) +٥$\sqrt{٢}$ جتا٢٢٥ +٤٥ جتا٢٧٠

٠ = ٣٠ × ١ + ق × –جاهـ + ٥$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ +٤٥ × ٠

٠ = ٣٠ – ق جاهـ – ٥ ∴ ق جاهـ = ٢٥ - - - - (١)

ص=٠ = ٣٠ جا٠ + ق جا(٩٠+هـ) +٥$\sqrt{٢}$ جا٢٢٥ +٤٥ جا٢٧٠

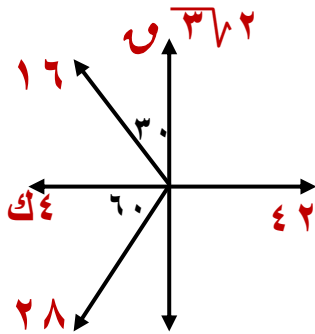
٠ = ٣٠×٠ + ق جتاهـ +٥$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ +٤٥ × -١

٠ = ٠ + ق جتاهـ - ٥ – ٤٥ ∴ ق جتاهـ = ٥٠ - - - - (٢)

بالقسمة (١) ÷ (٢) ∴ ظاهـ = $\frac{١}{٢}$ ومن الرسم

ق جاهـ = ٢٥ ق × $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ = ٢٥ ∴ ق = ٢٥ $\sqrt{٥}$

مثـــال : أتزنت نقطة مادية تحت تأثير القوى ٤٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ق ، ١٦ ، ٤ ك ، ٢٨ ث كجم فى أتجاهات الشرق ، الشمال ، ٣٠° غرب الشمال ، الغرب ، ٦٠° جنوب الغرب أوجد قيمتى ق ، ك

الحـــــــــــل

القوة	٤٢	٢ $\sqrt{٣}$ ق	١٦	٤ك	٢٨
الزاوية	٠	٩٠	١٢٠	١٨٠	٢٤٠

المجموعة متزنة ∴ $\vec{ح}$ = (٠ ، ٠)

س= ٤٢ جتا٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ ق جتا٩٠ +١٦ جتا١٢٠ +٤ ك جتا١٨٠ +٢٨ جتا٢٤٠=٠

س = ٤٢ × ١ + ٢ $\sqrt{٣}$ ق × ٠ +١٦ × $\frac{-١}{٢}$ + ٤ ك × -١ + ٢٨ × $\frac{-١}{٢}$ =٠

س = ٤٢ + ٠ – ٨ – ٤ ك – ١٤ = ٠ ⇐ ٤ ك = ٢٠ ∴ ك = ٥

ص= ٤٢جا٠ +٢ $\sqrt{٣}$ ق جا٩٠ +١٦ جا١٢٠ +٤ ك جا١٨٠ +٢٨ جا٢٤٠ =٠

ص = ٤٢ × ٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ ق × ١ +١٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤ ك × ٠ +٢٨ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ =٠

ص = ٠ +٢ $\sqrt{٣}$ ق + ٨ $\sqrt{٣}$ – ١٤ $\sqrt{٣}$ =٠

⇐ ٢ $\sqrt{٣}$ ق = ٦ $\sqrt{٣}$ ∴ ٢ ق = ٦ ∴ ق = ٣

مثـــال : الشكل المقابل يمثل القوى ق ، ٥ ، ك ، ٦ $\sqrt{١٠}$ نيوتن والمتزنة والتى تؤثر فى المستطيل ٢ ب حـ ء فى الاتجاهات $\overrightarrow{حب}$ ، $\overrightarrow{٢حـ}$ ، $\overrightarrow{حء}$ ، $\overrightarrow{هـحـ}$ حيث ٢ ب = ٦سم ، ب حـ = ٨ سم ، ٢ هـ =٦سم أوجد قيمة: ق ، ك

الحـــــــــــل

القوة	ق	٥	$٢\sqrt{١٠}$	ك
الزاوية	٠	$هـ_١$	$هـ_٢$	٩٠

∵ المجموعة متزنة ∴ $\overrightarrow{ح} = (٠ ، ٠)$

س = ق جتا ٠ + ٥ جتا $هـ_١$ + $٢\sqrt{١٠}$ جتا $هـ_٢$ + ك جتا ٩٠ = ٠

= ق × ١ + ٥ × $\frac{٤}{٥}$ + $٢\sqrt{١٠}$ × $\frac{-٣}{\sqrt{١٠}}$ + ك × ٠ = ٠

= ق + ٤ ـ ٦ = ٠ ⟸ ق = ٢ نيوتن

ص = ق جا ٠ + ٥ جا $هـ_١$ + $٢\sqrt{١٠}$ جا $هـ_٢$ + ك جا ٩٠ = ٠

= ق × ٠ + ٥ × $\frac{٣}{٥}$ + $٢\sqrt{١٠}$ × $\frac{-٤}{\sqrt{١٠}}$ + ك × ١ = ٠

= ٠ + ٣ ـ ٨ + ك = ٠ ⟸ ك = ٥ نيوتن

مثــال : أ ب جـ ء شبه منحرف قائم الزاوية فى جـ فيه $\overleftarrow{أ ء}$ // $\overleftarrow{ب جـ}$ ، ب جـ = ١٨سم ، جـ ء = ٨سم ، أ ء = ١٢سم أثرت قوى مقاديرها ١٠ ، $ق_١$ ، $ق_٢$ فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ على الترتيب أوجد $ق_١$ ، $ق_٢$ حتى تتزن المجموعة

الحـــــــــل

المجموعة متزنة $\overrightarrow{ح} = (٠ ، ٠)$

القوة	$ق_٢$	$ق_١$	١٠
الزاوية	٠	٩٠	١٨٠+ هـ

الأتجاه السينى س = ٠ = $ق_٢$ جتا ٠ + $ق_١$ جتا ٩٠ + ١٠ جتا(١٨٠ ـ هـ)

٠ = $ق_٢$ × ١ + $ق_١$ × ٠ + ١٠ × $\frac{-٦}{١٠}$ = $ق_٢$ ـ ٦ ⟸ ∴ $ق_٢$ = ٦

الأتجاه الصادى ص = ٠ = $ق_٢$ جا ٠ + $ق_١$ جا ٩٠ + ١٠ جا(١٨٠ - هـ)

٠ = $ق_٢$ × ٠ + $ق_١$ × ١ + ١٠ × $\frac{-٨}{١٠}$ = $ق_١$ ـ ٨ ⟸ ∴ $ق_١$ = ٨

تمارين على اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى

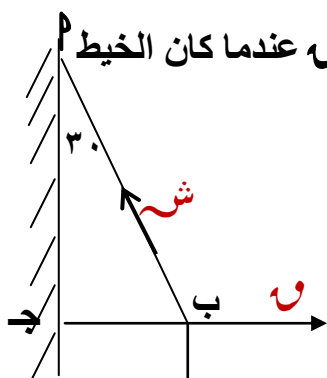
[١] أكمـــل ما يأتى :

١) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن محصلة أى قوتين منها تساوى فى المقدار .... و تكون على استقامتها فى .... المضاد .

٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة و رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاثة و فى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون ....

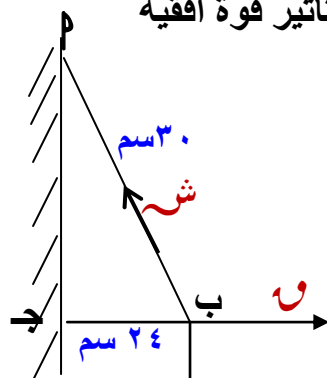
٣) فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ٩ نيوتن معلق فى نهاية خيط اتزن بتأثير قوة أفقية مقدارها ق عندما كان الخيط يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠ °

أ) $\frac{ق}{.....} = \frac{ش}{......} = \frac{٩}{.....}$

ب) ق = ... نيوتن ، ش = ... نيوتن

٤) فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ٩٠ ث جم معلق فى نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن و هو على بعد ٢٤ سم من الحائط فإن :

أ) $\frac{ق}{.....} = \frac{ش}{......} = \frac{٩}{.....}$

ب) ق = ... ث جم ، ش = ... ث جم

٥) فى الشكل المقابل :

خيط خفيف يمر خلال حلقة ملساء وزنها ١٠٠ داين ، ش١ ⊥ ش٢

فإن : ش١ = ... داين

، ش٢ = ... داين

[٢] ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ١٢ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت القوى متزنة . فما قياس الزاوية بين القوتين الأخرتين ؟

[٣] ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ = ٨ ث جم ، $ق_٢$ = ٤ $\sqrt{٣}$ ث جم ، $ق_٣$ = ٤ ث جم . أوجد قياسات الزوايا الثلاثة بين خطوط عمل القوى الثلاثة علما بأن المجموعة متزنة .

[٤] علق ثقل مقداره ٣٤٠ ث جم بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين فى خط أفقى البعد بينهما ١٠٠ سم أوجد الشد فى كل من الخيطين .

[٥] علق جسم وزنه ٦.٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠.٥ متر و طول الاخر ١.٢ متر وربط الخيطان فى نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين .
أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين .

[٦] علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث جم من طرف خيط مثبت طرفه الأخر فى سقف حجرة ثم جذب الثقل بقوة أفقية حتى أصبح الخيط مائلا على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠ °
عين مقدار كل من القوة الأفقية و الشد فى الخيط

[٧]علق وزن مقداره ٧٢ ثقل جرام فى أحد طرفى خيط و ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ٮ على حائط رأسي ز ربط خيط ثأن عند نقطة ب من الخيط الأول تبعد عن ٮ بمقدار ٢٥ سم و شد فى اتجاه افقى حتى صارت النقطة ب تبعد عن الحائط ٧ سم .
أوجد قوة الشد فى الخيط الافقى و فى كل من جزأى الخيط الثانى

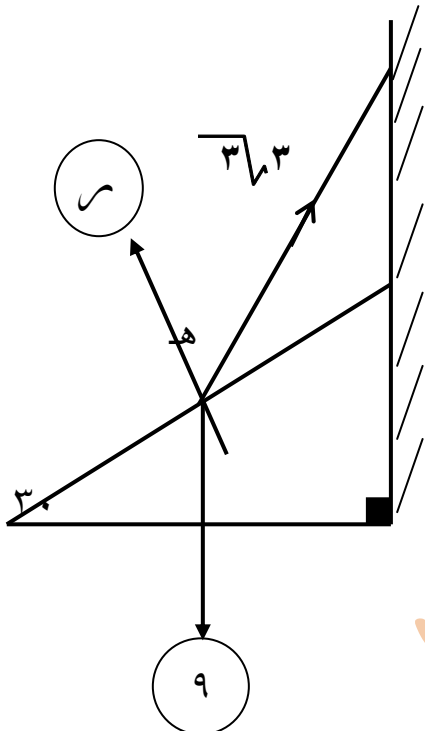
[٨] علق جسم وزنه ٢٠٠ ث جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسي بزاوية قياسها هـ و يميل الخيط الأخر على الرأسي بزاوية ٣٠ ° ، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث جم ، فأوجد هـ ، مقدار الشد فى الخيط الثانى.

[٩] علق وزن (و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسي بزاوية قياسها هـ ويمر على بكرة صغيرة ملساء و يحمل فى نهايته الأخرى وزنا مقداره ١٢ نيوتن و يميل الثانى على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠ ° و يمر على بكرة صعيرة ملساء و يحمل فى نهايته الأخرى وزنا مقداره ٨ نيوتن ز أوجد مقدار الوزن و قيمة هـ

[١٠] جسم وزنه ٤٠٠ ثقل جرام معلق من نقطة ٮ بواسطة خيط ، ربط خيط فى نقطة ب من الخيط و شد أفقيا بخيط ثان $\overline{\text{ب حـ}}$ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبته و يتدلى فى نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ثقل جرام . أوجد ميل $\overline{\text{ٮب}}$ على الرأسي و الشد فى كل من الخيطين $\overline{\text{ٮب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$

مسائل على اتزان جسم على مستو مائل أملس :

[١] وضع جسم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠ ° إذا حفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة ق تعمل فى اتجاه أكبر ميل للمستوى الى أعلى و مقدارها ٢٠٠ ث جم فأوجد وزن الجسم و رد فعل المستوى على الجسم .

[٢] وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ و حفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن و تميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية لها نفس القياس هـ لأعلى . أوجد قيمة هـ و رد فعل المستوى على الجسم .

[٣] جسم وزنه ٩ ث كجم موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية ٣٠ ° و حفظ توازنه بواسطة قوة شد ش مقدارها ٣ $\sqrt{٣}$ ث كجم تعمل فى خيط مثبت من أحد طرفيه بالجسم و الطرف الآخر فى حائط رأسي . أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيطمع الافقى و مقدار رد فعل المستوى على الجسم .

[٤] وضع جسم وزنه ٩٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠ ° و إذا حفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة . أوجد هذه القوة و رد فعل المستوى :
(١) إذا كانت أفقية (٢) إذا كانت تصنع زاوية قياسها ٦٠ ° مع الافقى

مسائل على تلاقى خطوط عمل ثلاث قوى متزنة :

[١] كرة ملساء طول نصف قطرها ٦ سم و وزنها ٢٤ نيوتن يؤثر فى مركزها مستندة على حائط رأسي أملس و معلقة بخيط طوله ٤ سم . ثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها و ثبت الطرف الآخر فوق نقطة تماس الكرة بالحائط تماماً . أوجد رد فعل الحائط و الشد فى الخيط

[٢] كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس و معلقة بخيط مثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها و طرفه الاخر مربوط فى الحائط فى نقطة ⍵ على نقطة تماس الكرة تماما فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على الحائط و الشد فى الخيط

[٣] علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقا مطلقا فى خيطين مربوطين فى نقطة واحدة و كان طول أحدهما ٥٠ سم و طول ١٢٠ سم . ما هو الوضع الذى يكون فيه القضيب متزنا ؟ ز ما هو مقدار الشد فى كل من الخيطين ؟

[٤] كرة مصمتة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد و البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ١٠ نيوتن

[٥] قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يؤثر فى منتصفه علق من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى مسمار فى السقف فإذا كان الحبلان متعامدين و طول أحدهما ٤٨ سم فما مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقاً تعليقاً مطلقاً و فى حالة توازن

[٦] قضيب منتظم $\overline{\text{ٮ ب}}$ يمكنه الدوران بغير عائق فى مستوى رأسي حول مفصل فى ٮ ، ربط طرفه الاخر ب بخيط يمر على بكرة ملساء عند جـ أعلى ٮ تماماً و يحمل ثقلا يساوى نصف ثقل القضيب . أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الافقى فى حالة التوازن إذا علم أن ٮ جـ = ٮ ب

[٧] $\overline{\text{ٮ ب}}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يسند بطرفه ٮ على حائط رأسي أملس و محمول بواسطة خيط خفيف مربوط أحد طرفيه فى نقطة جـ من نقط القضيب حيث ب ج = ١٠ سم و مربوط طرفه الاخر فى نقطة ء تقع على الحائط راسياً فوق ٮ إذا كان القضيب يميل على الرأسي بزاوية ٦٠ ° فى وضع التوازن فأوجد مقدار الشد فى الخيط ، رد فعل الحائط .

مسائل على اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى :

[١] فى الشكل المقابل :

قوى مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ٥ $\sqrt{3}$ ، ٧ $\sqrt{3}$ نيوتن

تؤثر فى النقطة (و) و تصنع مع محور السينات زوايا قياساتها مبينة بالشكل .

أوجد ق١ ، ق٢ علما بأن المجموعة متزنة

مذكرة : تطبيقات الرياضيات

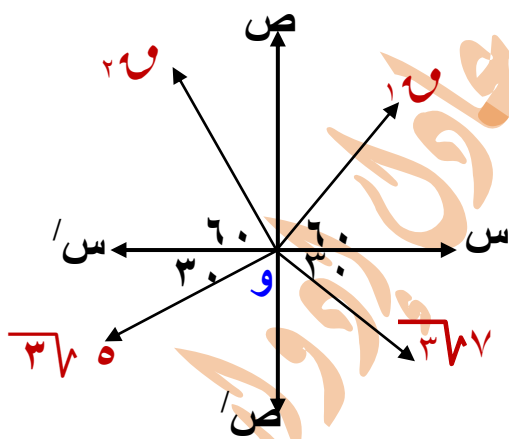
الهندسة الفراغية

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

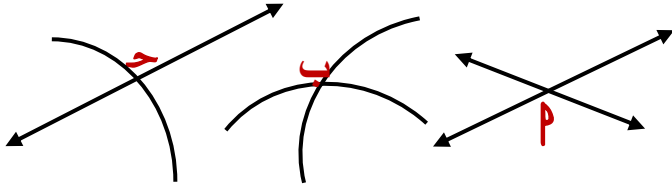
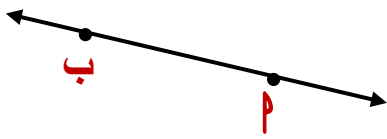
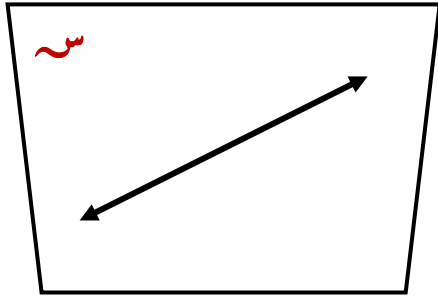
الترم الأول ٢٠٢٠

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

الوحدة الثالثة : الهندسة والقياس

- المستقيمات والمستويات فى الفراغ
- الهرم والمخلوط
- المساحة الجانبية والكلية للهرم المنتظم والمخروط المنتظم
- حجم الهرم المنتظم والمخروط المنتظم
- الدائرة

ثانيا : الهندسة والقياس

المستقيمات و المستويات فى الفراغ

تذكر أن :

١) **النقطة** هى مكان ناتج من تقاطع خطين مستقيمين أو منحنين أو مستقيم و منحنى .

٢) **الخط المستقيم** : مجموعة من النقط غير المنتهية ممتد من جهتية يتعين بنقطتين عليه .
و يقرأ م ب المستقيم $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

٣) **المستوى** : مجموعة من النقط غير المنتهية ينطبق علية المستقيم فى جميع حالاته و ممتد من جميع جهاته بلا نهاية و يتعين بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
و يقرأ بثلاث نقاط عليه على الاقل أو نرمز له بأحد الحروف الكبيرة س ، ص ، .....

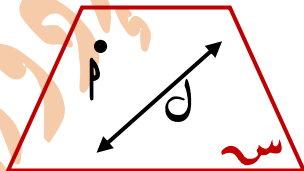
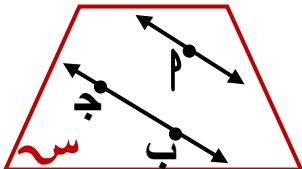
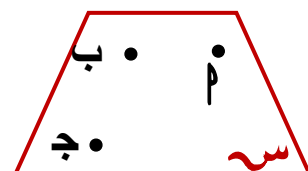
٤) **الفراغ (الفضاء)** : مجموعة من النقط غير المنتهية و يعتبر المجموعة الشاملة التى تحتوى على المستقيمات و المستويات و المجسمات .

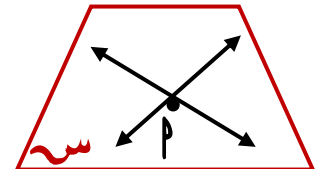
مفاهيم و مسلمات :

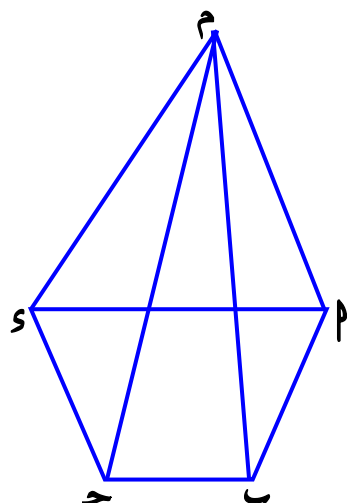
(٣) إذا اشترك مستقيم و مستوى فى أكثر من نقطة فإن المستقيم يقع بأكمله فى المستوى .

تعيين المستوى بأى من الحالات الآتية

(١) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

(٢) مستقيم ونقطة خارجه .

(٣) مستقيمين متقاطعين .

(٤) مستقيمين متوازيين .

ملاحظات :

١ ـ أى نقطة فى المستوى يمر بها عدد لا نهائى من المستقيمات .
٢ ـ أى نقطة فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات .
٣ ـ أى مستقيم فى الفراغ يمر بها عدد لا نهائى من المستويات .
٤ ـ كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستو واحد و واحد فقط

مثـــ١ـــال : تأمل الشكل الذى أمامك ثم أجب

١ ـ كم عدد المستقيمات بالشكل ؟
٢ ـ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطة م ، نقطة ب
٣ ـ كم عدد المستويات بالشكل ؟
٤ ـ اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ
٥ ـ اذكر المستقيمات التى تمر بنقطة أ ، ب معا
٦ ـ اذكر المستويات التى تمر بالنقطة أ ، ب معا

الحـــــــل

(١) عدد المستقيمات بالشكل = ٨

(٢) المستقيمات التى تمر بنقطة م هى م أ ، م ب ، م جـ ، م ء

المستقيمات التى تمر بنقطة ب هى م ب ، أ ب ، ب جـ

(٣) عدد المستويات بالشكل = ٥

(٤) ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ هى م أ ء ، م أ ب ، أ ب جـ ء

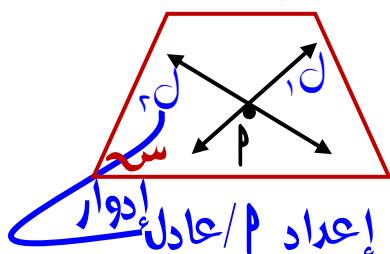
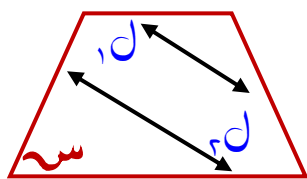
(٥) المستقيمات التى تمر بنقطة أ ، ب معا هى أ ب

(٦) المستويات تمر بالنقطة أ ، ب معا هى م أ ب ، أ ب جـ ء

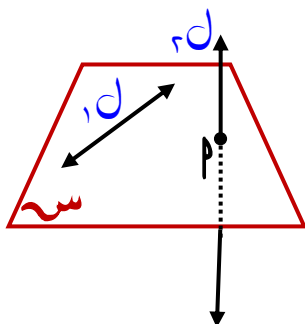
العلاقة بين مستقيمين فى الفراغ :

توجد ثلاث حالات مختلفة للأوضاع النسبية لمستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$ فى الفراغ هى :

(١) المستقيمان متقاطعان : و فى هذه الحالة يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

، ل$_1$ ، ل$_2$ يقعان فى مستوى واحد: ل$_1$ ∩ ل$_2$ = {أ}

(٢) **المستقيمان متوازيان :** و فى هذه الحالة

يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

: ل١ ∩ ل٢ = ∅ ، ل١ ، ل٢ يقعان فى مستوى واحد

(٣) **المستقيمان متخالفان :** وفى هذه الحالة

لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد .

: ل١ ∩ ل٢ = ∅ ، ل١ جزء من س

ويقال أنهما متخالفان أو غير مستويين

ملاحظة :

١- إذا كان ل١ ∩ ل٢ = ∅ و يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن : ل١ // ل٢

٢- إذا كان ل١ ∩ ل٢ = ∅ ولا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد فإن : ل١ ، ل٢ متخالفان

٣- المستقيمان المتخالفين غير متوازيان وغير متقاطعين لأنه لا يجمعهما مستوى واحد

العلاقة بين مستقيم و مستوى فى الفراغ :

للمستقيم و المستوى فى الفراغ ثلاث أوضاع هى :

المستقيم يقع بتمامه فى المستوى

أى أن : كل نقطة من نقط

المستقيم تنتمى للمستوى

ل ∩ س = ل

ل ⊂ س

المستقيم يقطع المستوى

أى أن : المسستقيم يشترك مع

المستوى فى نقطة واحدة

ل ∩ س = { م }

المستقيم يوازى المستوى

أى أن : المستقيم لا يشترك

مع المستوى فى أى نقطة

ل ∩ س = ∅

ل // س

الاوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ :

يوجد لمستويين مختلفين ثلاثة أوضاع فى الفراغ هى :

(١) المستويان متطابقان

س = ص

أى يشترك المستويان فى جميع النقط أو يشترك المستويان فى مستقيم و نقطة لا تنتمى إليه

(٢) المستويان متقاطعان

س ∩ ص = ل = ٲ ب

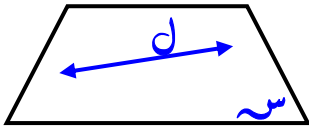
لأى يشترك المستويان فى خط مستقيم

(٣) المستويان متوازيان

س ∩ ص = ∅

أى لا يشترك المستويان فى أى نقطة

س // ص

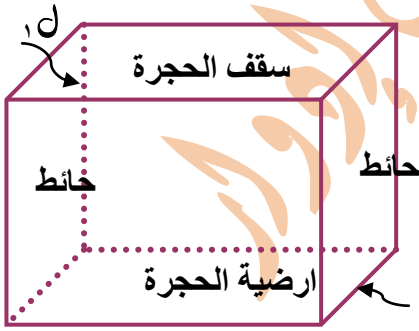
ملاحظة : المستويان المتقاطعان سواء كان أحدهما مائلاً على الآخر أو عمودياً عليه إذا أشتركا فى نقطة فلابد أن تقع هذه النقطة على خط تقاطعهما

ملاحظة :

إذا توازى مستويان فإن أى مستقيم فى أحدهما يوازى المستوى الآخر ففى الشكل المقابل :

إذا كان المستوى س // المستوى ص

، و كان : ل ⊂ س

فإن : ل // المستوى ص

بعض الملاحظات الهامة : تأمل حجرة الدراسة ولاحظ الآتى:

(١) جميع المستقيمات الرأسية متوازية فيما بينها

(٢) جميع المستويات الأفقية متوازية فيما بينها

(٣) ليس من الضرورى أن تتوازى المستقيمات الأفقية

(٤) ليس من الضرورى أن تتوازى المستويات الرأسية

(٥) المستقيمان المتوازيان أو المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد

مثـــ٢ـــال : تأمل الشكل المقابل ثم أكمل ما يأتى :

(أ) المستوى ؟ ب ب/ ؟/ ∩ المستوى ب جـ جـ/ ب/ = $\overleftrightarrow{\text{ب ب/}}$

(ب) المستوى ؟ ب جـ ∩ المستوى ؟/ ب/ جـ/ = ∅

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{؟ جـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{؟/ جـ/}}$ = ∅

(د) $\overleftrightarrow{\text{ب ب/}}$ ∩ المستوى ؟ ب جـ = { ب }

(هـ) $\overleftrightarrow{\text{ب ب/}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{؟ جـ}}$ = ∅

(ط) المستوى ؟ ؟/ ب ب/ ∩ المستوى ؟ ب جـ = $\overleftrightarrow{\text{؟ ب}}$

(و) المستوى ؟ ب جـ ∩ المستوى ؟ جـ جـ/ ؟/ ∩ المستوى ؟ ب ب/ ؟/ = { ؟ }

مثـــ٣ـــال: فى الشكل المقابل ؟ ∉ المستوى ب حـ ء

أكمل ما يأتى

(١) $\overleftrightarrow{\text{؟ ء}}$ ∩ المستوى ب حـ ء = { ء }

(٢) $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ ∩ المستوى ؟ ء ب = { ء }

(٣) $\overleftrightarrow{\text{ء ب}}$ ∩ المستوى ؟ ء حـ = { ء }

(٤) المستوى ب حـ ء ∩ المستوى ؟ ء ب = $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

(٥) المستوى ب حـ ء ∩ المستوى ؟ ء حـ = $\overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$

(٦) المستوى ب حـ ء ∩ المستوى ؟ ء ب = $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

مثـــ٤ـــال : فى الشكل المقابل ؟ ب حـ ء هـ و ل م مكعب أكمل ما يأتى :

(١) $\overleftrightarrow{\text{؟ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ...

(٢) $\overleftrightarrow{\text{؟ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ = ...

(٣) $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ // .... // .... // ....

(٤) المستوى ب حـ ل و // المستوى ....

(٥) المستوى ب حـ ل و ∩ المستوى ء ع ل م = ...

(٦) المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{؟ ب}}$ ، .... متخالفان

تمارين على المستقيمات و المستويات

[١] أكمل ما يأتى :

١) إذا كان المستقيم ل // المستوى س فإن ل ∩ س = ...

٢) إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س فإن ل ∩ س = ...

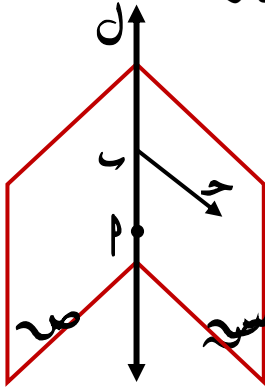
٣) إذا كان المستقيم ل١ // المستقيم ل٢ فإن ل١ ∩ ل٢ = ...

٤) إذا كان س ، ص مستويان حيث س ∩ ص = ∅ فإن س ..... ص

[٢] اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من :

أ) نقطة واحدة معلومة — ب) نقطتين مختلفتين .

جـ) ثلاث نقط على استقامة واحدة — د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

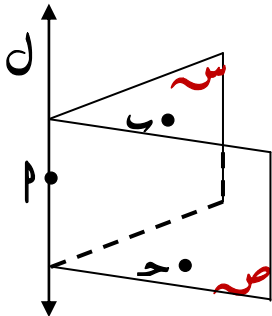
هـ) أربع نقط ليست فى مستوى واحد — و) ثلاث نقط ليست فى مستوى واحد

[٣] تأمل الشكل المقابل ثم أكمل باستخدام أحد الرموز (∋ ، ∌ ، ⊂ ، ⊄)

أ) ل .... س — ب) ٢ .... س

جـ) حـ .... ص — ٤) بـحـ .... ص

[٤] فى الشكل المقابل :

س ، ص مستويان متقاطعان فى المستقيم ل ، ٢ ∋ ل ، ب ∋ س ، ب ∌ ص

جـ ∋ ص ، جـ ∌ س أكمل ما يأتى :

١) المستوى س ∩ المستوى ٢بجـ = ...

٢) المستوى ص ∩ المستوى ٢بجـ = ...

٣) المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى ٢بجـ = ...

٤) المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى ٢بجـ = ...

(١) [٥] اختر (١) أى أربع نقط ليست فى مستوى واحد تعين لنا :

(أ) مستويان (ب) ثلاث مستويات (جـ) اربع مستويات (د) لا تعين مستو

(٢) يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا :

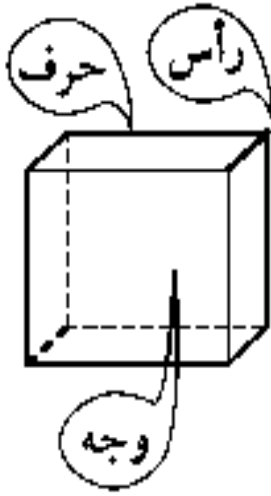
(أ) غير متوازيين (ب) غير منطبقين (جـ) لا يجمعهما مستوى واحد (د) يقعان فى مستوى واحد

(٣) $\overleftrightarrow{٢ب}$ توازى المستوى س إذا كان :

(أ) ٢ ب ∩ س = ∅ (ب) ٢، ب على بعدين مختلفين من المستوى س

(جـ) ٢ب ∩ س = ∅ (د) ٢، ب تقعان فى جهتين مختلفتين من س

الهـــــرم و المخروط

تذكر أن :

١) **المكعب** : هو متوازى مستطيلات تساوت أبعاده الثلاثة ، طول كل منها ل

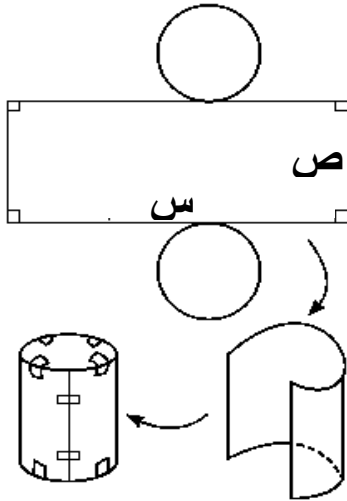
* كل وجة من أوجهه السته مربع

* مساحته الجانبية = ٤ ل^{2}

* مساحته الكلية = ٦ ل^{2}

* حجمه = ل^{3} * طول قطره = $\sqrt{3}$ ل

٢) **شبكة المجسم** : هو الشكل الذى يمكن طيه لتكوين المجسم .

و يمكن رسم أكثر من شبكة للمجسم .

٣) **الاسطوانة الدائرية القائمة** :

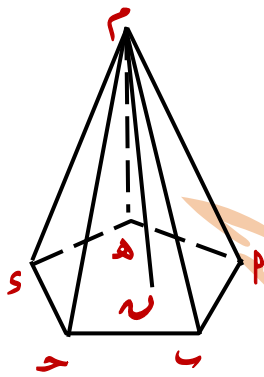
الشكل المقابل شبكة اسطوانة دائرية قائمة .

(أ) قاعدتا الاسطوانة متطابقتين و كل منهما على شكل دائرة

(ب) السطح الجانبى للاسطوانة قبل طيه هو مستطيل بعداه س ، ص ، ارتفاع الاسطوانة ص وحدة طول

الهرم :

هو إتحاد جميع القطع المستقيمة الواصلة من نقطة (تسمى رأس الهرم) " لا تنتمى إلى المستوى الذى يحوى سطح مضلع (يسمى قاعدة الهرم) " إلى نقطة تنتمى لقاعدة الهرم

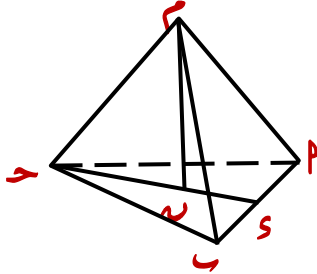
* يسمى الهرم حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته
* أحرفه الجانبية هى القطع المستقيمة الواصلة بين رأسه و رؤوس قاعدته
* أوجهه الجانبية هى سطوح المثلثات التى رأسها هى رأس الهرم و قواعدها هى أضلاع قاعدة الهرم و ضلاعها الآخران أحرف جانبية للهرم
* إرتفاع الهرم هو العمود الساقط من رأسه على مستوى قاعدته

الهرم الثلاثى المنتظم :

هو هرم ثلاثى تساوت أحرفه الستة

أو هو هرم أوجهه الأربعة سطوح مثلثات متساوية أضلاع

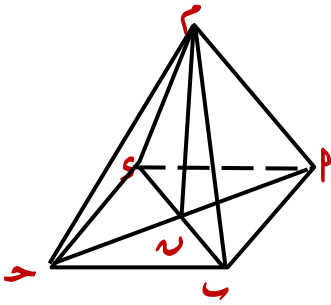
* إرتفاعه هو القطعة الواصلة بين رأسه و نقطة تلاقى متوسطات قاعدته
* من الشكل إذا كان طول حرفه = ل نلاحظ :

حـء = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل ، حـن = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ل ، ءن = $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

، إرتفاعه من = $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ل ، ارتفاعه الجانبى ع/ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

الهرم القائم المنتظم :

هو هرم قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليه أى أن :

* إرتفاع الهرم يلاقى القاعدة عند مركزها
* جميع الأحرف الجانبية له متساوية فى الطول

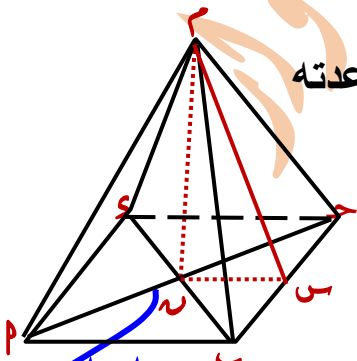
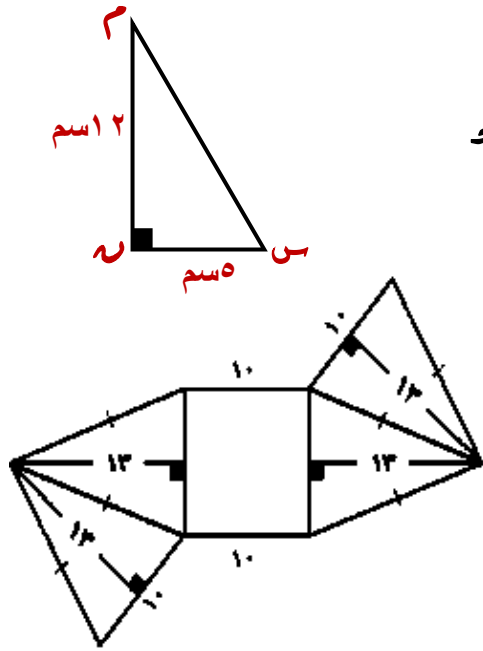
* قاعدة الهرم مضلع منتظم " مثلث متساوى الأضلاع ، مربع ، ...
* جميع الأوجه الجانبية له سطوح مثلثات متساوية الساقين و متطابقة
* إرتفاعاته الجانبية " إرتفاعات الأوجه الجانبية " متساوية فى الطول
* الهرم الثلاثى القائم قاعدته مثلث متساوى الأضلاع
* الهرم الرباعى القائم قاعدته سطح مربع و إرتفاعه يمر بمركز المربع أى نقطة تقاطع قطرى المربع

مثـــ١ــال: م ا ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعته ا ب جـ ء يساوى ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم أوجد ارتفاعه الجانبى و ارسم إحدى شبكاته.

الحـــــــل

من = ١٢ سم ارتفاع الهرم ، ا ب = ١٠ سم أحد أضلاع قاعدته

، ن نقطة تقاطع قطرى المربع ا ب جـ ء

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ $\overline{\text{من}}$ ⊥ المستوى ا ب جـ ء

بفرض س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ ب حـ

و يكون م س ارتفاع جانبى للهرم المنتظم .

فى Δ ء ب حـ : ں منتصف $\overline{ءب}$ ، س منتصف ب حـ

∵ $\overline{مں}$ ⊥ المستوى ٮ ب جـ ء

∴ Δ م ں س قائم الزاوية فى ں

∴ $(م س)^2 = (م ں)^2 + (ں س)^2$

$= (١٢)^2 + (٥)^2 = ١٦٩$

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٣ سم

و الشكل المقابل يوضح إحدى شبكات الهرم م ٮ ب

مثـــ٢ــال : م ٮ ب جـ هرم ثلاثى منتظم قائم الزاوية طول ضلعه ١٢ سم ، وارتفاع الهرم ٨ سم . أوجد طول حرفه الجانبى

الحـــــــــل

نفرض ء منتصف $\overline{ٮ ب}$

∵ Δ ٮ ب حـ متساوى الأضلاع ∴ $\overline{حـ ء}$ ⊥ $\overline{ٮ ب}$

∵ Δ ء ب حـ قائم الزوية فى ء

∴ $(حـ ء)^2 = (ب حـ)^2 - (ب ء)^2$

$حـ ء = \sqrt{(١٢)^2 - (٦)^2} = \sqrt{١٠٨} = ٦\sqrt{٣}$ سم

∵ ں نقطة تلاقى متوسطات Δ ٮ ب حـ

∴ $ں حـ = \frac{٢}{٣}$ حـ ء $= \frac{٢}{٣} \times ٦\sqrt{٣} = ٤\sqrt{٣}$ سم

∴ Δ م ں حـ قائم الزوية فى ں

∴ $(م حـ)^2 = (م ں)^2 + (ں حـ)^2$

$م حـ = \sqrt{(٨)^2 + (٤\sqrt{٣})^2} = \sqrt{٦٤ + ٤٨} = \sqrt{١١٢} = ٤\sqrt{٧}$ سم

المخـــروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق و رأس واحدة و يتكون سطحه الجانبى من جميع نقط القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته و التى يعرف كل منها براسم المخروط .

م

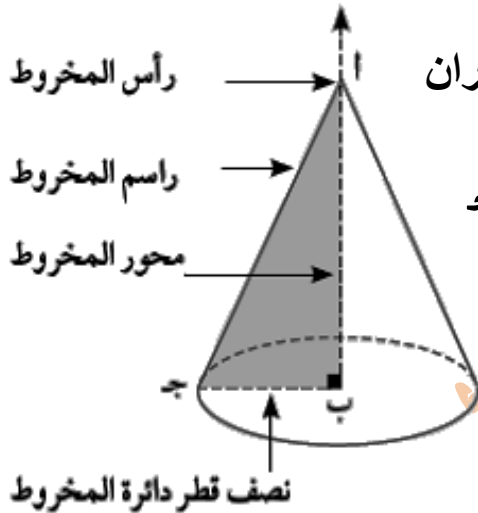
رأس المخروط

راسم المخروط

قاعدة المخروط

المخروط الدائرى القائم

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور

* خواص المخروط الدائرى القائم :

يوضح الشكل المقابل مخروط دائرى قائم ناشئ من دوران مثلث قائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ كمحور

(١) أ حـ راسم للمخروط ، أ رأس المخروط ،النقطة حـ ترسم أثناء الدوران دائرة مركزها النقطة ب وطول نصف قطرها يساوى طول ب حـ وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط

(٢) أ ب محور المخروط عمودى على مستوى القاعدة أرتفاع المخروط يساوى طول $\overline{\text{أ ب}}$

أ

رأس المخروط

راسم المخروط

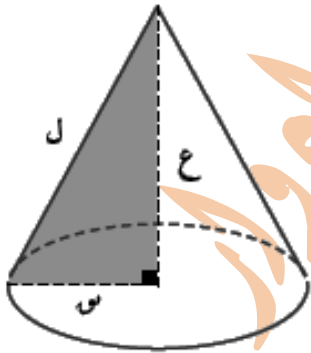
محور المخروط

جـ

ب

نصف قطر دائرة المخروط

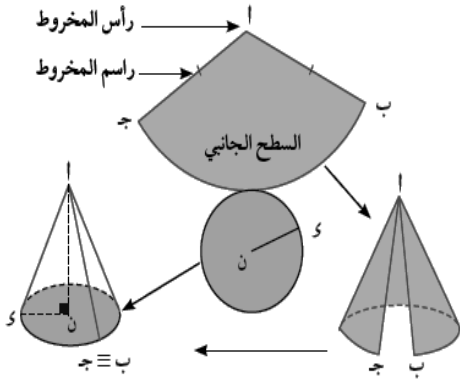
مثـــ١ـــال : أوجد بدلالة π محيط و مساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه٢٦ سم .

الحـــــــــل

بفرض طول الراسم = ل ، ارتفاع المخروط = ع ، طول نصف قطر دائرة المخروط = نق

∵ نق^2 = ل^2 – ع^2 ∴ نق^2 = (٢٦)^2 – (٢٤)^2 = ١٠٠

∴ نق = ١٠ سم

محيط قاعدة المخروط القائم = ٢ π نق = ٢ π × ١٠ = ٢٠ π

مساحة القاعدة = π نق^2 = π × (٢٤)^2 = ٥٧٦ π سم^2

* **شبكة المخروط القائم** : يمكن طى شبكة المخروط القائم لتكوين عبوات مخروطية الشكل .

١ـ أب = أجـ = ل (طول راسم المخروط)

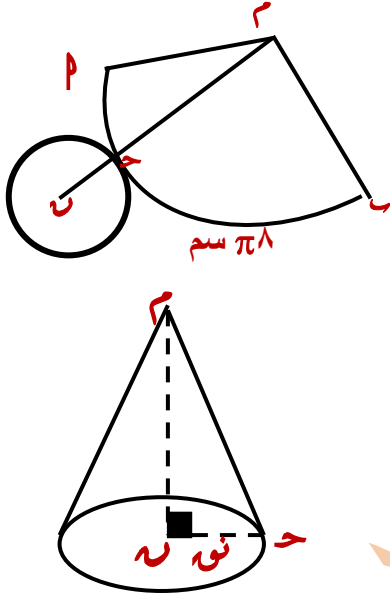
٢ـ القطاع أب جـ يمثل السطح الجانبي للمخروط ، طول $\overset{\frown}{\text{ب جـ}}$ = ٢ π نق

حيث نق طول نصف قطر قاعدة المخروط

٣ـ ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{أن}}$

تذكر أن : مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق حيث ل طول قوسه ، نق نصف قطر دائرته

مثـــ٤ـــال : الشكل المقابل يوضح شبكة مخروط قائم مكون من قطاع دائرى مساحته ٢٠ π سم. وطول قوسه أ حـ ب = ٨ π سم . أوجد إرتفاع المخروط .

الحـــــــــل

من شبكة المخروط نلاحظ أن :

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

٢٠ π = $\frac{1}{2}$ × ٨π نق

∴ نق = ٥ سم وهو يمثل راسم المخروط م حـ

عند طى شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل

فيكون ارتفاع المخروط = طول $\overline{\text{م ن}}$

∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ (م ن)^2 = (م حـ)^2 ـ (ن حـ)^2

م ن = $\sqrt{(٥)^2 - (٤)^2}$ = $\sqrt{٢٥ - ١٦}$ = ٣ سم

مثـــ٥ـــال : خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعة ٩٦ سم ومحيط قاعدتها ٤٥٢,١٦ سم . أحسب طول راسم مخروط الخيمة .

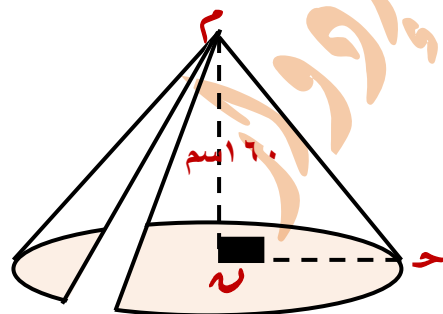
الحـــــــــل

من شبكة المخروط نلاحظ أن :

∵ محيط القاعدة = ٢πنق = ٢ × ٣,١٤نق = ٤٥٢,١٦

∴ نق = ٧٢ سم وهو يمثل راسم المخروط ن حـ

Δ م ن حـ ∴ (م حـ)^2 = (م ن)^2 + (ن حـ)^2

م ن = $\sqrt{(٩٦)^2 + (٧٢)^2}$ = ١٢٠ سم

تمارين على مفهوم الهرم و المخروط

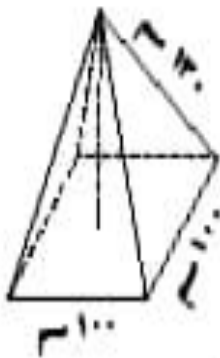
(١) فى الهرم الخماسى المنتظم:

أ) ما عدد أوجهه الجانبية. ب) ما عدد الأوجه.

ج) ما عدد أحرف الجانبية. د) ما عدد أحرفه

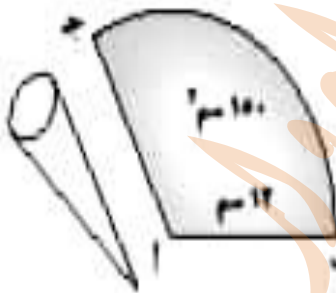
هـ) للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى؟ هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعه. "عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢"

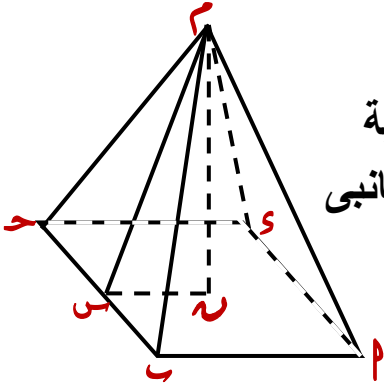
(٢) فى الهرم المنتظم ، رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر

أ) طول الحرف الجانبي ب) ارتفاع الهرم

ج) الارتفاع الجانبي

(٣) هندسة مدنية: يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعيناً بالبيانات المعطاة أوجد كلًا من ارتفاع الوجه الجانبي وارتفاع الخزان.

(٤) الربط بالجوالة: خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعها ١٦٠سم ومحيط قاعدتها ٧٥٣,٦سم احسب طول راسم مخروط الخيمة

(٥) الربط بالسياحة: هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا، وارتفاعه الجانبي ١٨٦ مترًا، أوجد ارتفاع الهرم

(٦) الربط بالصناعة: تغلف الألبان المثلجة فى مخروط دائرى قائم بطى قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢سم ومساحته ١٥٠سم^2 بحيث يتلاصق نصفا قطرى دائرته $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ أوجد ارتفاع المخروط. [تذكر: مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ طول قوسه × طول نصف قطر دائرته].

المساحة الجانبية و الكلية للهرم المنتظم القائم والمخروط القائم

المساحة الجانبية للهرم القائم = مجموع مساحات أوجهه الجانبية

المساحة الجانبية للهرم المنتظم= $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الأرتفاع

مثــ١ـــال: م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٨سم ،طول حرفه الجانبى = ١٥ سم . (أ) الأرتفاع الجانبى للهرم (ب) ارتفاع الهرم (حـ) المساحة الكلية للهرم

الحـــــــــل

المجسم هرم رباعى منتظم قائم

طول حرفه الجانبى م ب = ل = ١٥سم ، ب س = ٩سم

∴ Δ م ب س قائم الزاوية فى س

(أ) ارتفاعه الجانبى م س = $\sqrt{(م ب)^2 - (ب س)^2}$

= $\sqrt{(١٥)^2 - (٩)^2}$ = ١٢ سم

∴ Δ م ن س قائم الزاوية فى ن

∴ $(م ن)^2 = \sqrt{(م س)^2 - (ن س)^2}$

م ن = $\sqrt{(١٢)^2 - (٩)^2}$ = $\sqrt{١٤٤ - ٨١}$ = $\sqrt{٦٣}$ = ٣$\sqrt{٧}$ سم

محيط قاعدته (مربع) = ٤ × ١٨ = ٧٢ سم

مساحة قاعدته = مربع طول ضلعه = $(١٨)^2$ = ٣٢٤ $سم^2$

مساحة الهرم الجانبية = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × الارتفاع الجانبي

= $\frac{1}{2}$ × ٧٢ × ١٢ = ٤٣٢ $سم^2$

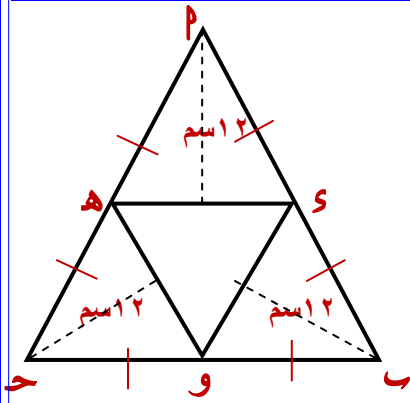
مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

= ٤٣٢ + ٣٢٤ = ٧٥٦ $سم^2$

مثــ٢ـــال: بإستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم و أوجد مساحته الكلية

الحـــــــــل

بفرض: ب و = ل

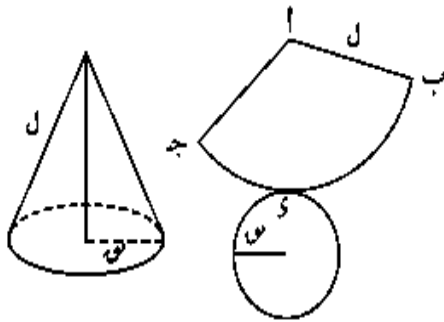
ء و = و هـ = ء هـ = $\frac{1}{2}$ أ حـ = ل سم

Δ ء هـ و (مثلث متساوى الاضلاع) طول ضلعه = ل

$\therefore$ الشبكة لهرم ثلاثى منتظم الوجوه

فيكون جا ٦٠ = $\frac{١٢}{ل}$ $\therefore$ ل = ٨$\sqrt{٣}$ سم

مساحته الكلية = ٤ × مساحة الوجه الواحد

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ٨$\sqrt{٣}$ × ١٢ = ١٩٢$\sqrt{٣}$ سم^٢

المخروط القائم

بفرض ل طول راسمه ، نق طول نصف قطر دائرته.

المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^٢

= π نق (ل + نق)

تذكر أن : فى القطاع الدائرى هـ^ء = $\frac{ل}{نق}$

حيث هـ^ء زاوية القطاع بالدائرى ، ل طول قوسه ، نق طول نصف قطر دائرته

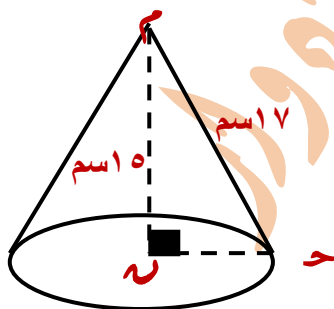
مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ هـ^ء نق^٢

محيط القطاع = ٢ نق + ل

مثـــ٣ــال: أوجد المساحة الكلية لمخروط قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم.

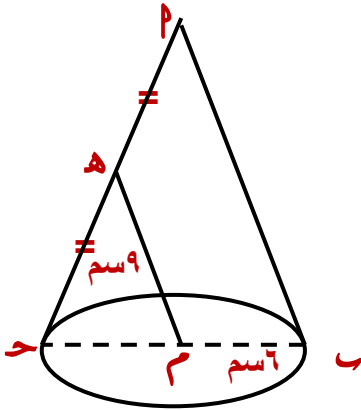
الحـــــــــل

$\because$ Δ م ن حـ قائم الزوية فى ن

$\therefore$ (ن حـ)^٢ = (م حـ)^٢ ـ (م ن)^٢

ن حـ = نق = $\sqrt{(١٧)^٢ - (١٥)^٢}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^٢

= π نق (ل + نق) = π × ٨ (١٧ + ٨) = ٢٠٠ π سم^٢

مثــ٤ــال: فى الشكل المقابل: أوجد المساحة الجانبية والكلية لمخروط الدائرى القائم

الحـــــــــل

∵ م، هـ منتصفى ب جـ ، أ جـ فى Δ أ ب جـ

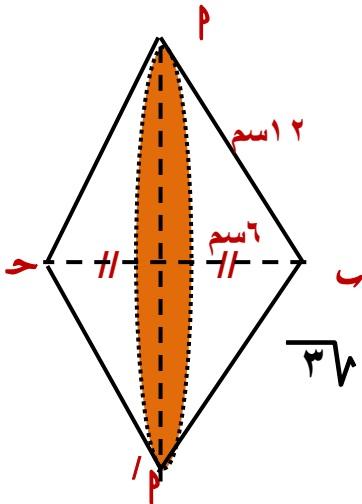
∴ أ ب = ٢ × ٩ = ١٨ سم (طو راسم المخروط)

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = ٦ × ١٨ π = ١٠٨π

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل نق + π نق^{٢}

= π نق(ل + نق) = π × ٦ (١٨ + ٦) = ١٤٤ π سم^{٢}

مثــ٥ــال: أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٢سم دار دورة كاملة حول أحد أضلاعه أوجد المساحة الجانبية للجسم الناشئ

الحـــــــــل

الجسم الناشئ من الدوران مخروطان متطابقان

ولهما قاعدة مشتركة

(دائرة مركزها م ونصف قطرها = $\sqrt{(١٢)^{٢} - (٦)^{٢}}$ = ٦$\sqrt{٣}$

∴ وأرتفاع كل منهما = ٦ سم

∴ المساحة الجانبية للمجسم = ٢ × π نق ل = ٢× ١٢× ٦$\sqrt{٣}$ π = ١٤٤$\sqrt{٣}$ π

مثــ٦ــال: غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم احسب مساحته لأقرب سنتيمتر مربع.

الحـــــــــل

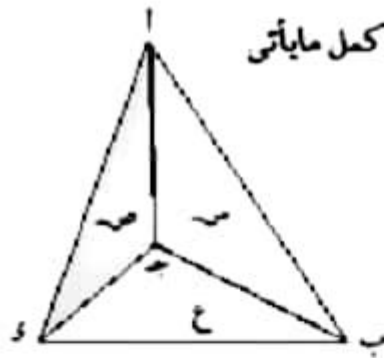
بفرض نق نصف قطر دائرته ، ل طول الحرف الجانبى ،

ع الارتفاع ، ∵ محيط دائرته = ٨٨

∴ ٢ π نق = ٨٨ ∴ نق = ١٤ سم

∵ ل^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٤)^{٢} = ٥٩٦ ∴ ل = ٢٤,٤ سم

مساحة غطاء المصباح = π ل نق = π × ٢٤,٤ × ١٤ = ١٠٧٣,٢ سم^{٢}

تمارين على المساحات للهرم و المخروط

(١) الشكل المقابل يمثل هرم ثلاثى ، س ، ص ، ع ثلاث مستويات أكمل مايأتى

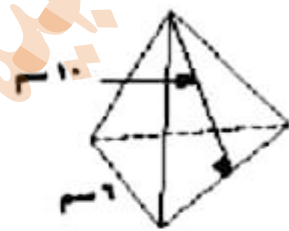
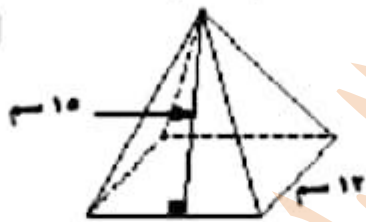
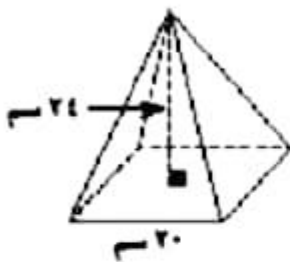
أ) س ∩ ص = ________ ب) س ∩ ع = ________

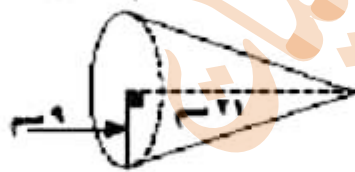
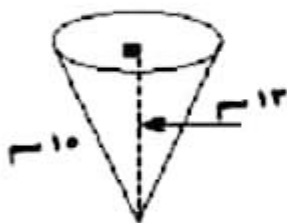
جـ) ص ∩ ع = ________ د) $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ س = ________

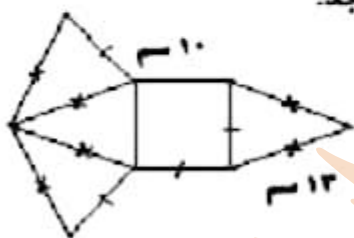
هـ) $\overleftrightarrow{بجـ}$ ________ س ، $\overleftrightarrow{بجـ}$ ________ ع

و) س ∩ ص ∩ ع = ________

(٢) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة.

أ) ب) جـ)

(٣) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة.

أ) ب) جـ)

(٤) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه الجانبى ١٠$\sqrt{3}$ سم. أوجد:

أ) مساحته الجانبية ب) مساحته الكلية

(٥) الربط بالصناعة. تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.

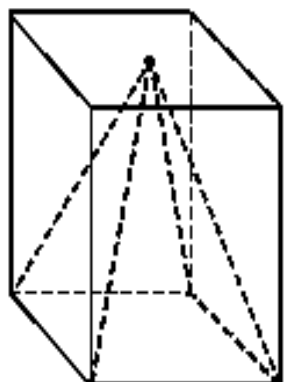
أ) أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة.

ب) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا.

(٦) طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا. أوجد ارتفاع المخروط.

(مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق^2 هـ^د ، نق طول نصف قطر دائرة القطاع ، هـ^د قياس زاويته المركزية بالراديان).

(٧) أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم، إذا كان طول راسمه ١٥سم، ومساحته الكلية ١٥٤π سم^2.

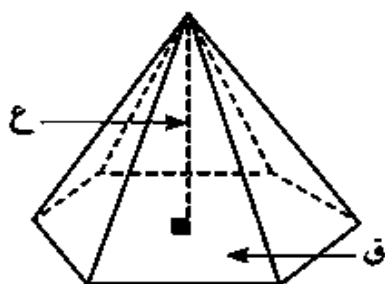
حجم الهرم المخروط القائم

تذكر أن : ١- حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع
قاعدته مثلث أو مربع أو شكل رباعى أو ....

٢- حجم الاسطوانة القائمة = مساحة القاعدة × الارتفاع
قاعدتها دائرة طول نصف قطرها نق

٣- مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٤}$ س٢ ظتا $\frac{\pi}{ن}$
حيث ن عدد اضلاعه ، س طول ضلعه ، π = ١٨٠°

العلاقة بين حجم الهرم و المنشور المشتركتان فى نفس القاعدة و الارتفاع :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ارتفاعه

* **حجم الهـــرم :**

حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته × ارتفاعه = $\frac{١}{٣}$ ق × ع

حيث (ق) مساحة القاعدة ، (ع) ارتفاع الهرم

مثـــ١ـــال: م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٨سم ،طول ارتفاعه الجانبى = ١٥ سم . أوجد (أ) ارتفاع الهرم (ب) حجم للهرم

الحـــــــــل

هرم رباعى منتظم قائم طول قاعدته = ١٨ سم
طول ارتفاعه الجانبى م س = ١٥سم ، ن س = ٩سم

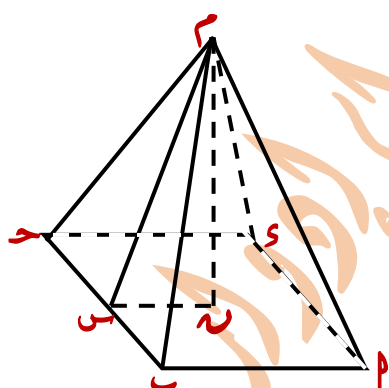
(أ) ∴ Δ م ن س قائم الزاوية فى ن

∴ (م ن)٢ = $\sqrt{(م س)^٢ - (ن س)^٢}$

ارتفاع الهرم م ن = $\sqrt{(١٥)^٢ - (٩)^٢}$

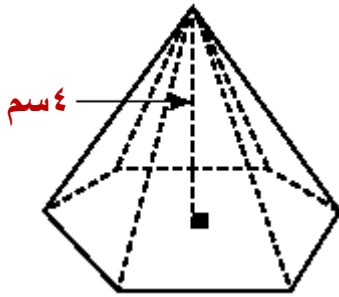
= $\sqrt{٢٢٥ - ٨١}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

مساحة قاعدته (مربع) = (١٨)٢ = ٣٢٤ سم٢

(ب) حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع = $\frac{١}{٣}$ × ٣٢٤ × ١٢ = ١٢٩٦سم٣

مثـــ٢ـــال : هرم سداسى منتظم حجمه $٨\sqrt{٣}$ سم^{٣} وأرتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

الحـــــل

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع

∴ $٨\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة سداسى × ٤

∴ مساحة السداسى المنتظم = $٦\sqrt{٣}$ سم^{٢}

$\frac{٦}{٤}$ × س^{٢} × ظتا $\frac{\pi}{٦}$ = $٦\sqrt{٣}$

⟸ س^{٢} = $٦\sqrt{٣}$ × $\frac{٤}{٦}$ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = ٤ ⟸ س = ٢ ∴ المحيط ٢ × ٦ = ١٢سم

مثـــ٣ـــال: هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٩سم^{٢} وطول حرفه الجانبى ٥ سم أوجد حجمه

الحـــــل

مساحة المربع(القاعدة) = ٩ سم^{٢} ∴ طول ضلعه = ٣ سم

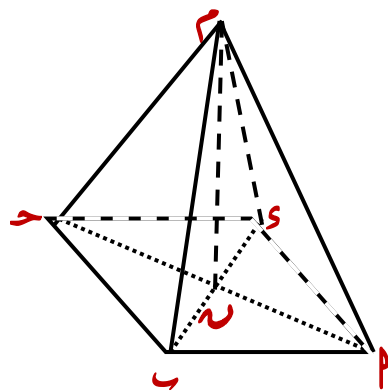
ا حـ = $٣\sqrt{٢}$ سم ⟸ ن حـ = $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$ سم

∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

ارتفاع الهرم م ن = $\sqrt{(م حـ)^{٢} - (ن حـ)^{٢}}$

= $\sqrt{(٥)^{٢} - (\frac{٣}{٢}\sqrt{٢})^{٢}}$ = $\frac{١}{٢}\sqrt{٨٢}$ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٩ × $\frac{١}{٢}\sqrt{٨٢}$ = ١٣,٦ سم^{٣}

مثـــ٤ـــال : م ا ب جـ هرم ثلاثى رأسه على بعد ١٥ سم من قاعدته وأطوال أضلاع قاعدته هى ٥ ، ٦ ، ٧ سم . أوجد حجمه

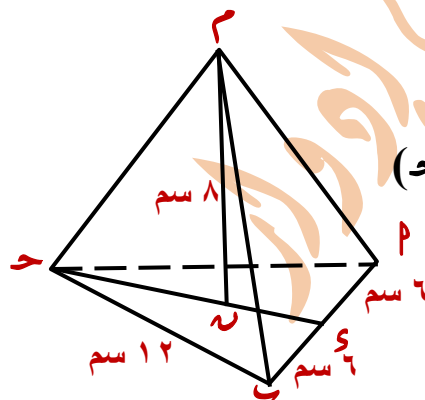
الحـــــل

محيط القاعدة = ٥ + ٦ + ٧ = ١٨ سم

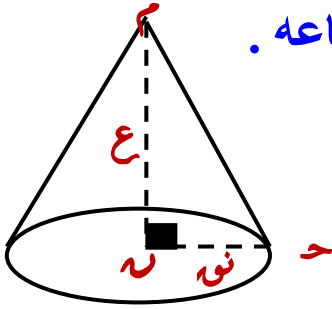
∵ مساحة Δ ا ب حـ = $\sqrt{ع(ع-ا)(ع-ب)(ع-حـ)}$

= $\sqrt{٩(٩-٥)(٩-٦)(٩-٧)}$ = $\sqrt{٢١٦}$ = $٦\sqrt{٦}$

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة قاعدته × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $٦\sqrt{٦}$ × ١٥ = $٣٠\sqrt{٦}$ سم^{٣}

حجم المخروط القائم:

حجم المخروط = ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه .

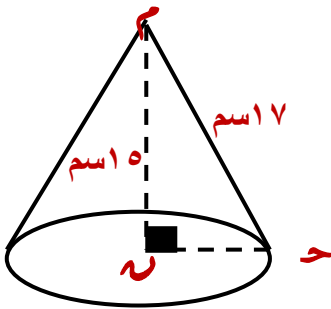
$= \frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع

حيث (نق) طول نصف قطر دائرة المخروط ،

(ع) ارتفاع المخروط

مثـــ٥ــال: أوجد حجم المخروط القائم. طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم.

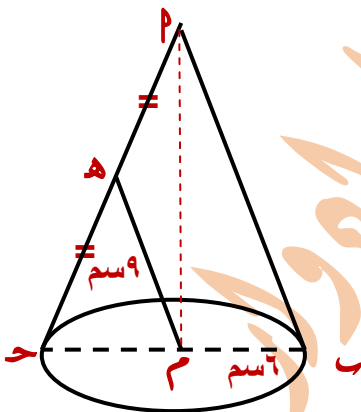
الحـــــــــل

∵ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ (ن حـ)^2 = نق^2 = (م حـ)^2 − (م ن)^2

ن حـ = نق = $\sqrt{(١٧)^2 - (١٥)^2}$ = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم

∵ حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع

$= \frac{1}{3} \pi \times (٨)^2 \times ١٥ = ٣٢٠ \pi$ سم^3

مثـــ٦ــال: فى الشكل المقابل: أوجد حجم والمساحة الجانبية لمخروط الدائرى القائم

الحـــــــــل

∵ م، هـ منتصفى ب حـ ، أ حـ فى Δ أ ب حـ

∴ أ ب = ٢ × ٩ = ١٨ سم (طو راسم المخروط)

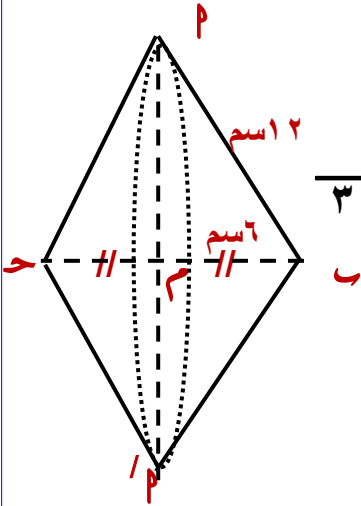
∴ المساحة الجانبية = π نق ل = ٦ × ١٨ π = ١٠٨π

ع = $\sqrt{(١٨)^2 - (٦)^2}$ = ١٢$\sqrt{٢}$ سم

حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 × ع

$= \frac{1}{3} \times \pi \times (٦)^2 \times ١٢\sqrt{٢} = ١٤٤\sqrt{٢}\ \pi$ سم^3

مثـــ٧ـــال: ٢ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه = ١٢سم دار دورة كاملة حول أحد أضلاعه أوجد حجم للجسم الناشئ

الحــــــــــل

الجسم الناشئ من الدوران مخروطان متطابقان

ولهما قاعدة مشتركة

(دائرة مركزها م ونصف قطرها = $\sqrt{(١٢)^٢ - (٦)^٢}$ = ٦$\sqrt{٣}$

∴ وأرتفاع كل منهما = ٦ سم

∴ حجم الجسم الناتج =٢ × $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ × ع

= ٢ × $\frac{١}{٣}$ π × (٦$\sqrt{٣}$)^٢ × ٦ = ٤٣٢ π سم^٣

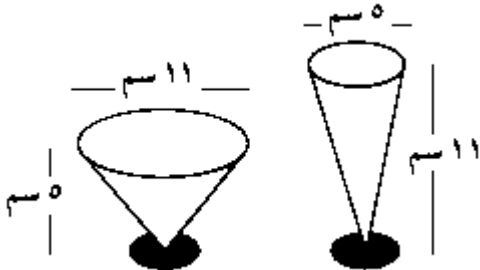
مثـــ٨ـــال : قطعة من الشيكولاته على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم أوجد ارتفاعه .

الحــــــــــل

∵ محيط قاعدته = ٦ π سم ∴ ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

∵ حجم المخروط = ٢٧ π سم^٣ ∴ $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = ٢٧ π

∴ $\frac{١}{٣}$ π × (٣)^٢ × ع = ٢٧ π ∴ ع = ٩ سم ∴ الارتفاع = ٩ سم

مثـــ٩ـــال : ٢ ، ب كأسان للشراب . ايهما سعته أكبر ؟ أوجد الفرق بين سعتيهما .

الحــــــــــل

الكأس الأول : نق= ٢,٥ سم ، ع = ١١ سم

حجم الكأس الاول = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (٢,٥)^٢ × ١١ = ٧٢ سم^٣

الكأس الثانى : نق = ٥,٥ سم ، ع = ٥ سم

حجم الكأس الثانى = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ × ع = $\frac{١}{٣}$ π × (٥,٥)^٢ × ٥ = ٥٠,٤ سم^٣

الفرق بين سعتيهما = ٧٢ – ٥٠,٤ = ٢١,٦ سم^٣ [تذكر أن : الحجم = السعة]

تمارين على حجم المخروط والهرم

(١) أوجد حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه ٣٦سم.

(٢) احسب لأقرب رقم عشرى واحد، حجم هرم خماسى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠سم وارتفاعه ١٠سم.

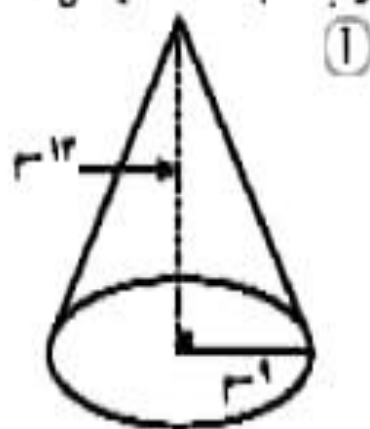
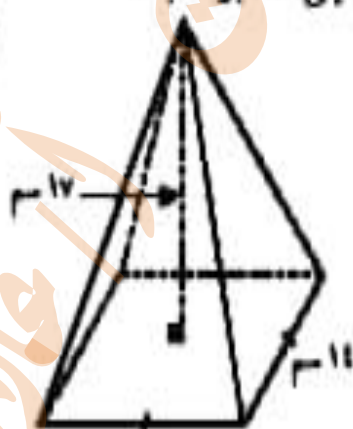
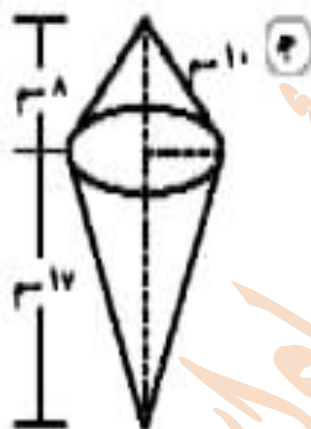
(٣) هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩سم، وحجمه ٣٠٠سم^3. أوجد طول ضلع قاعدته.

(٤) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^2، وارتفاعه الجانبى ٢٠سم أوجد حجمه.

(٥) أيهما أكبر حجماً؟ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠سم، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠سم ومحيط قاعدته ٤٨سم.

(٦) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم.

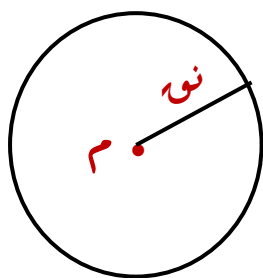
(٧) أوجد حجم مخروط دائرى قائم، مساحته الجانبية ٢٢٠سم وطول راسمه ١٤سم.

(٨) رتب المجسمات التالية من الأصغر حجمًا إلى الأكبر حجمًا.

(٩) الربط بالسياحة: صنع نموذج للهرم الأكبر من سبيكة معدنية كثافتها ٣,٢جم/سم^3. إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥سم وارتفاعه ٧سم، فاحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد.

(١٠) الربط بالفيزياء: إناء أسطوانى الشكل به ماء، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم، ارتفاعه ١٢سم وطول نصف قطر قاعدته ٢سم غمرًا كاملاً، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١سم. أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

معادلة الدائرة

نق
م

*** تذكر أن :**

١ـ الدائرة :هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى. حيث تسمى م النقطة الثابتة مركز الدائرة و نصف قطرها نق و نرمز للدائرة بـ د

٢ـ البعد بين النقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$$= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

٣ـ صورة النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) بالانتقال (م ، ن) هى النقطة ($س_١$ + م ، $ص_١$ + ن)

صورة النقطة (ـ ٢ ، ٤) بالانتقال (٤ ، ١) هى النقطة (٢ ، ٥)

٤ـ إحداثى منتصف المسافة بين النقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$$= \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

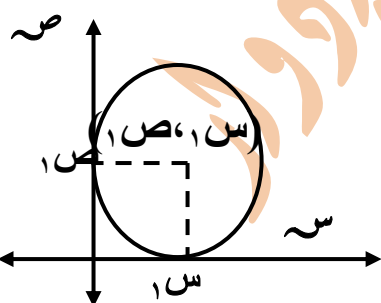
٥ـ مساحة اى مضلع منتظم = $\frac{ن}{٢}$ $نق^٢$ حا $\frac{٣٦٠}{ن}$

حيث نق نصف قطر الدائرة المار برؤوسه ، ن عدد أضلاع المضلع .

٦ـ طول العمود من نقطة ($س_١$ ، $ص_١$) لا تنتمى لمستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

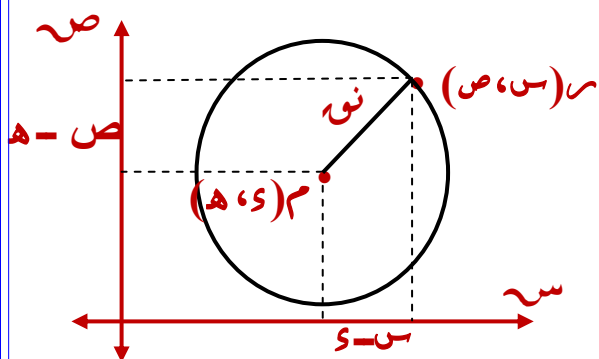
($س_١$ ، $ص_١$)

أ س + ب ص + جـ = ٠

$$\text{طول العمود ل} = \frac{| أ س_١ + ب ص_١ + جـ |}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

ملحوظة : البعد بين النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) ، المستقيم س = ٠ (محور الصادات) = | $س_١$ |

، البعد بين ($س_١$ ، $ص_١$)

و المستقيم ص = ٠ (محورالسينات) = | $ص_١$ |

٧ـ تتطابق دائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما $نق_١$ = $نق_٢$

معادلة الدائرة

بدلالة إحداثى مركزها وطول نصف قطرها

إذا كانت النقطة ر (س ، ص) ∋ الدائرة م(ء، هـ)

وطول نصف قطرها = نق فإن معادلة الدائرة ء

$$(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$$

حيث م (ء، هـ) مركز الدائرة ، نق نصف قطر الدائرة

مثــ١ــال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها م (٤ ، ـ ٣) و طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات

الحـــــــــــل

بفرض أن النقطة ر (س ، ص)∋ الدائرة ء

∵ مركز الدائرة (٤ ، ـ ٣) ، طول نصف قطر الدائرة = ٥ وحدات

∴ ء = ٤ ، هـ = -٣ ، نق = ٥ وحدات

∴ تكون المعادلة هى $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = (٥)^{٢}$

اى : $(س - ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥$

مثــ٢ــال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها م (٢ ، ٠) و طول قطرها $\sqrt{٢٨}$ وحدات

الحـــــــــــل

م (٢ ، ٠) ، القطر = $\sqrt{٢٨}$ = ٢ $\sqrt{٧}$ ∴ نق = $\sqrt{٧}$ وحدة

∵ $(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$

∴ المعادلة $(س - ٢)^{٢} + (ص - ٠)^{٢} = (\sqrt{٧})^{٢}$

∴ معادلة الدائرة هى $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٧$

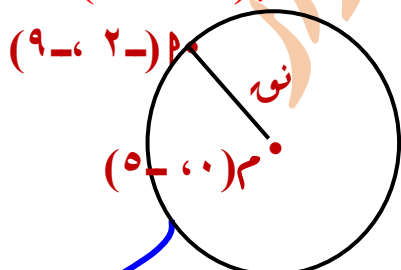
مثــ٣ــال : اكتب معادلة الدائرة إذا كان مركزها (٠ ، ـ٥) و تمر بالنقطة ا (ـ٢ ، ـ ٩)

الحـــــــــــل

ا(ـ٢ ، ـ٩)
نق
م(٠، ـ٥)

$نق^{٢} = (-٢ - ٠)^{٢} + (-٩ + ٥)^{٢} = ٢٠$

∴ معادلة الدائرة هى $(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$

∴ المعادلة هى $(س - ٠)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٠$

اى : $س^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٠$

حالة خاصة: معادلة الدائرة مركزها نقطة الاصل و طول نصف قطرها = نو

∴ معادلة الدائرة هى $(س - ٠)^٢ + (ص - ٠)^٢ = نو^٢$

هى: $س^٢ + ص^٢ = نو^٢$

مثــ٤ـــال : اكتب معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{ﻢب}$ حيث ﻢ(٢ ، ـ ٧) ، ب (٦ ، ٥)

الحـــــــــــل

بفرض النقطة م (ى ، هـ) مركز للدائرة التى قطرها $\overline{ﻢب}$

و هى منتصف $\overline{ﻢب}$

∴ م (ى، هـ)= $(\frac{٢ + ٦}{٢} ، \frac{-٧ + ٥}{٢}) = (٤ ، ـ ١)$

$نو^٢ = (م ﻢ)^٢ = (٢ - ٤)^٢ + (- ٧ + ١)^٢ = ٤ + ٣٦ = ٤٠$

تكون معادلة الدائرة : $(س - ٤)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٤٠$

ملاحظة هامة : بفرض النقطة $(س_١، ص_١)$ فى مستوى الدائرة د التى معادلتها $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نو^٢$ فإنه :

١ـ إذا كان $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ > نو^٢$ فإن النقطة تقع خارج الدائرة

٢ـ إذا كان $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ < نو^٢$ فإن النقطة تقع داخل الدائرة

٣ـ إذا كان $(س - ى)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نو^٢$ فإن النقطة تقع الدائرة

مثــ٥ـــال : حدد موضع النقط التالية تنتمى الى الدائرة د التى معادلتها

$(س - ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥$ حيث النقط ﻢ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، جـ (٢ ، ـ ٣)

الحـــــــــــل

بالتعويض عن ﻢ فى المعادلة المعطاه نجد :

الطرف الايمن = $(٩ - ٦)^٢ + (٣ + ١)^٢ = ٩ + ١٦ = ٢٥$ = الطرف الايسر

∴ النقطة ﻢ(٩ ، ٣) ∋ الدائرة ى

بالتعويض عن ب فى المعادلة المعطاه نجد :

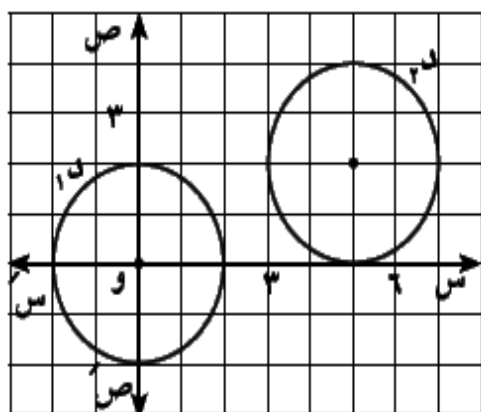
الطرف الايمن = (٧ – ٦)^{٢} + (٥ + ١)^{٢} = ١ + ٣٦ = ٣٧ > الطرف الايسر

∴ النقطة ب تقع خارج الدائرة

بالتعويض عن جـ فى المعادلة المعطاه :

الطرف الايمن = (٢ – ٦)^{٢} + (-٣ + ١)^{٢} = ١٤ + ٤ = ١٨ < الطرف الايسر

∴ النقطة جـ تقع داخل الدائرة .

مثـــ٦ـــال : الشكل المقابل فيه د ١ ، د ٢ دائرتان أثبت أن الدائرتان متطابقتان ثم أوجد معادلة كل منهما

الحـــــــــــــــل

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما

∵ نق١ = نق٢ = ٢ وحدة

∴ الدائرتان متطابقتان

∵ الدائرة د ١ : مركزها (٠ ، ٠) ، نق١ = ٢ وحدة

∴ معادلة الدائرة د ١ : س^{٢} + ص^{٢} = ٤

e الدائرة د٢ : مركزها (٥ ، ٢) ، نق٢ = ٢ وحدة

∴ معادلة الدائرة د ٢ : (س – ٥)^{٢} + (ص – ٢)^{٢} = ٤

و يلاحظ من الرسم أن الدائرة د٢ هى صورة الدائرة د١ بالانتقال (٥ ، ٢)

مثـــ٧ـــال : اكتب معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٥ ، ٤) و تمس المستقيم س = ٢

الحـــــــــــــــل

∵ مركز الدائرة م(٥ ، ٤) ، نق طول نصف قطرها

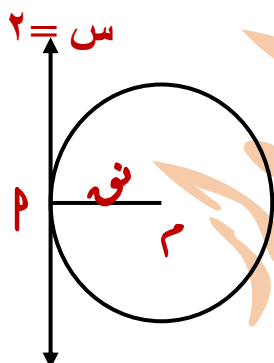
و من قانون طول العمود من نقطة م الى المستقيم س – ٢ = ٠

حيث أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = -٢

∴ نق = م أ = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$

= |٥ – ٢| = |٣| = ٣

∴ معادلة الدائرة هى (س – ى)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ المعادلة هى (س – ٥)^{٢} + (ص – ٤)^{٢} = (٣)^{٢} = ٩

مثــ٨ــال : أوجد إحداثيا المركز و طول نصف قطر كل من الدوائر الآتية :

(أ) (س – ٢)^2 + (ص + ٣)^2 = ١٧ (ب) (س + ١)^2 = ١٦ ـ ص^2

الحـــــــــل

(أ) ∵ معادلة الدائرة هى : (س – ى)^2 + (ص – هـ)^2 = نق^2

∴ س – ى = س – ٢ ∴ ى = ٢

، ص – هـ = ص + ٣ ∴ هـ = - ٣

∵ نق^2 = ١٧ ∴ نق = $\sqrt{١٧}$

فيكون مركز الدائرة النقطة (٢ ، - ٣) و طول نصف قطرها يساوى $\sqrt{١٧}$ وحدة

(ب) المعادلة المعطاه (س+١)^2 + ص^2 = ١٦ و نظيره فى المعادلة

∴ س – ى = س + ١ ∴ ى = - ١

، ص – هـ = ص ∴ هـ = صفر

∵ نق^2 = ١٦ ∴ نق = ٤

فيكون مركز الدائرة النقطة (-١ ، ٠) و طول نصف قطرها يساوى ٤ وحدة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

∵ معادلة الدائرة التى مركزها (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات

هى (س – ى)^2 + (ص – هـ)^2 = نق^2 بفك الاقواس

∴ س^2 + ص^2 ـ ٢ ى س ـ ٢ هـ ص + ى^2 + هـ^2 ـ نق^2 = ٠

∵ ى ، هـ ، نق ثوابت ∴ المقدار ى^2 + هـ^2 ـ نق^2 = مقدارا ثابتا

وبوضع ل = ـ ى ، ك = ـ هـ ، جـ = ى^2 + هـ^2 ـ نق^2 تصبح المعادلة على الصورة

الصورة العامة لمعادلة دائرة : س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

مركزها (ـ ل ، ـ ك) و طول نصف قطرها يساوى نق حيث

نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 ـ جـ}$ ، ل^2 + ك^2 ـ جـ > ٠

مثـــ٩ـــال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان مركزها النقطة م (٦، ـ ٣) و طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات .

الحـــــــــــل

∵ مركز الدائرة (ـ ل ، ـ ك) فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

، مركز الدائرة (٦ ، ـ٣) معطى ∴ ل = ـ ٦ ، ك = ٣

∵ نق = ٥ ، جـ = ل^2 + ك^2 ـ نق^2

∴ جـ = (ـ ٦)^2 + (٣)^2 ـ (٥)^2 = ٢٠ وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة

هى: س^2 + ص^2 ــ ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠

مثـــ١٠ـــال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان مركزها النقطة ن (٥ ، ـ ٣) و تمر بالنقطة ب (٢ ، ١) .

الحـــــــــــل

نفرض نق نصف قطر الدائرة المعطاه ،مركزها ن(٥ ، ـ ٣)

نق = (ب ن) = $\sqrt{(٢ - ٥)^2 + (١ + ٣)^2}$ = ٥ وحدة

∴ مركز الدائرة (ـ ل ، ـ ك) فى الصورة العامة

∴ل = ـ ٥ ، ك = ٣ ، نق = ٥

∴ جـ = ل^2 + ك^2 ـ نق^2 = (ـ٥)^2 + (٣)^2 ـ (٥)^2 = ٩

وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س٢ + ص٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠

∴ س^2 + ص^2 ـ ١٠ س + ٦ ص + ٩ = ٠

مثـــ١١ـــال : اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، ـ ٧) ، ب (٦ ، ٥)

الحـــــــــــل

∴ م (ى ، هـ) منتصف $\overline{أب}$ = ($\frac{٢ + ٦}{٢}$ ، $\frac{-٧ + ٥}{٢}$) = (٤ ، ـ ١)

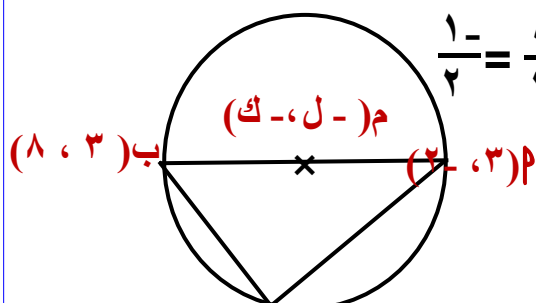
∴ مركز الدائرة (ـ ل ، ـ ك) فى الصورة العامة ∴ ل = ـ ٤ ، ك = ١

∵ نق^2 = (م أ)^2 = (٢ ـ ٤)^2 + (ـ٧ + ١)^2 = ٤ + ٣٦ = ٤٠ ∴ نق = $٢\sqrt{١٠}$

، جـ = ل^2 + ك^2 ـ نق^2 = (ـ ٤)^2 + (١)^2 ـ ٤٠ = ـ ٢٣

و تكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^2 + ص^2 ـ ٨ س + ٢ ص ـ ٢٣ =٠

مثـــ١٢ـــال : إذا كانت النقط أ (٣ ، ـ ٢) ، ب(٣ ، ٨) ، جـ (ـ١، ٠) تنتمى الى دائرة واحدة فأثبت أن $\overline{\text{أب}}$ قطر فيها ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها .

الحــــــــــل

الميل $= \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{-٢ - ٠}{٣ + ١} = \frac{-١}{٢}$

، ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} = \frac{٨ - ٠}{٣ + ١} = ٢$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}} = \frac{-١}{٢} \times ٢ = -١$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أجـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ∴ ق(∠جـ) = ٩٠° محيطية مرسومة فى نصف دائرة

∴ أب قطر فى الدائرة .

∵ م (ـل ، ـ ك) = $\left(\frac{٣ + ٣}{٢} ، \frac{-٢ + ٨}{٢} \right)$ = (٣ ، ٣) ∴ ل = ـ٣ ، ك = ـ٣

، نق^2 = (أم)^2 = (٣ ـ ٣)^2 + (-٢ ـ ٣)^2 = ٠ + ٢٥ = ٢٥

، جـ = ل^2 + ك^2 ـ نق^2 = (ـ ٣)^2 + (ـ ٣)^2 ـ ٢٥ = ـ ٧

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة : س^2 + ص^2 ـ ٦ س ـ ٦ ص ـ ٧ = ٠

الشروط اللازمة لتصبح معادلة الدائرة فى الصورة العامة :

س^2 + ص^2 + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠ يجب تحقق الشروط الثلاثة الأتية معا :

(١) المعادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص (٢) معامل س^2 = معامل ص^2 = الوحدة

(٣) خالية من الحد الذى يحتوى س ص أى معامل س ص = ٠ ، ل^2 + ك^2 ـ جـ > ٠

لتعيين إحداثى مركز دائرة و طول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها

- ❖ تحقق أولا من وضع المعادلة فى الصورة العامة حيث : معامل س^2 = معامل ص^2 = ١

  إحداثيا المركز (ـ ل ، ـ ك) أى ($\frac{\text{ـ معامل س}}{٢}$ ، $\frac{\text{ـ معامل ص}}{٢}$)
- ❖ طول نصف قطر الدائرة يتعين من العلاقة : نق= $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}}$
- ❖ حيث ل^2 + ك^2 ـ جـ > ٠

مثـــ١٣ـــال: أى المعادلات الآتية تمثل دائرة وإذا كانت معادلة دائرة .
أوجد مركزها و طول نصف قطرها:

١) $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٤ ص + ١٧ = ٠$ ٢) $٤ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٤٩$

٣) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٢ ص = ٠$ ٤) $س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص + ٣ = ٠$

٥) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٢٥ = ٠$ ٦) $٣ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٦ س - ٨ ص = ٠$

الحـــــــــــل

١) $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٤ ص + ١٧ = ٠$ ⇐ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة
، خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = -٣ ، ك = ٢ ، جـ = ١٧
∵ $ل^٢ + ك^٢ - جـ = ٩ + ٤ - ١٧ = -٤ < ٠$ ∴ المعادلة ليست دائرة

٢) $٤ س^٢ + ٤ ص^٢ = ٤٩$ بالقسمة على ٤
∴ $س^٢ + ص^٢ - \frac{٤٩}{٤} = ٠$ ⇐ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة
، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = ٠ ، ك = ٠ ، $جـ = -\frac{٤٩}{٤}$
، $ل^٢ + ك^٢ - جـ = ٠ + ٠ - (-\frac{٤٩}{٤}) > ٠$ ∴ $نق = \frac{٧}{٢}$ دائرة مركزها (٠،٠)

٣) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٢ ص = ٠$ ⇐ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة
، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = ٢ ، ك = -١ ، جـ = ٠
، $ل^٢ + ك^٢ - جـ = ٤ + ١ - ٠ = ٥ > ٠$ ∴ $نق = \sqrt{٥}$
∴ المعادلة تمثل دائرة مركزها (-٢ ، ١) ، طول نصف قطرها $= \sqrt{٥}$

٤) $س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص + ٣ = ٠$ ⇐ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = الوحدة
و المعادلة تحتوى على س ص ∴ المعادلة ليست دائرة

٥) $س^٢ + ٢ ص^٢ + ٤ س + ٢٥ = ٠$ ⇐ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١
، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص ، ل = ٢ ، ك = ٠ ، جـ = ٢٥
، $ل^٢ + ك^٢ - جـ = ٤ + ٠ - ٢٥ = -٢٤ < ٠$ ∴ المعادلة ليست دائرة

٦) $٣ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٦ س - ٨ ص = ٠$ ⇐ ∵ معامل $س^٢$ ≠ معامل $ص^٢$
∴ المعادلة ليست دائرة

مثـــ١٤ـــال : هل الدائرتين د$_١$: س^٢ + ص^٢ ــ ١٠ س ــ ٨ ص + ١٦ = ٠
، د$_٢$: س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ١٠ ص ــ ٢٦ = ٠
متماستان من الخارج ؟ فسر إجابتك .

الحـــــــــــــل

بفرض نق$_١$ ، نق$_٢$ طولا نصفى قطري د$_١$ ، د$_٢$ على الترتيب .

م$_١$ (-ل$_١$ ، - ك$_١$) مركز الدائرة د$_١$ ، م$_٢$ (- ل$_٢$ ، - ك$_٢$) مركز الدائرة د$_٢$

∵ د$_١$: س^٢ + ص^٢ ــ ١٠ س ــ ٨ ص + ١٦ = ٠

∴ ل$_١$ = - ٥ ، ك$_١$ = - ٤ ، جـ = ١٦ ∴ ل$_١^٢$ + ك$_١^٢$ ــ جـ = ٢٥ + ١٦ ــ ١٦ = ٢٥

∴ نق$_١$ = ٥ وحدة ، مركز الدائرة د$_١$ هو م$_١$(٥ ، ٤) .... [١]

∵ د$_٢$: س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ١٠ ص ــ ٢٦ = ٠

∴ ل$_٢$ = ٧ ، ك$_٢$ = ٥ ، جـ = - ٢٦ ∴ ل$_٢^٢$ + ك$_٢^٢$ ــ جـ = ٤٩ + ٢٥ + ٢٦ = ١٠٠ > ٠

∴ نق$_٢$ = ١٠ وحدة ، مركز الدائرة د$_٢$ هو م$_٢$ (- ٧ ، - ٥) .... [٢]

من ١ ، ٢ نجد : نق$_١$ + نق$_٢$ = ٥ + ١٠ = ١٥

طول خط المركزين = م$_١$ م$_٢$ = $\sqrt{(- ٧ ــ ٥)^٢ + (- ٥ ــ ٤)^٢}$ = ١٥

∵ م$_١$ م$_٢$ = نق$_١$ + نق$_٢$ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج

مثـــ١٥ـــال : يوضح الشكل المقابل مقطعا رأسيا فى أحد الانفاق الدائرية لمرور السيارات
معادلة دائرته : س^٢ + ص^٢ ــ ٤ س ــ ٦ ص ــ ١٢ = ٠ ، $\overline{أب}$ قطر فيها . أوجد
أقصى ارتفاع للنفق إذا كانت وحدة الأطوال فى المستوى الاحداثى تمثل ٧٠ سم

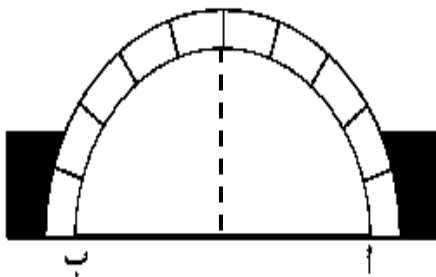
الحـــــــــــــل

∵ معادلة الدائرة س^٢ + ص^٢ ــ ٤ س ــ ٦ ص ــ ١٢ = ٠

∴ ل = ــ ٢ ، ك = ــ ٣ ، جـ = ــ ١٢

∴ ل^٢ + ك^٢ ــ جـ = ٤ + ٩ + ١٢ = ٢٥ > ٠

∴ نق = ٥ وحدة

∴ أقصى ارتفاع للنفق = نق = ٥ × ٧٠ = ٣٥٠ سم

تمارين على معادلة الدائرة

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) النقطة (٢ ، ٠) تقع على

أ محور السينات ب محور الصادات جـ المستقيم ص = ٢س د الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٩$

(٢) إذا كانت أ(٣ ، -٧) ، ب(-٣ ، ٥) فإن إحداثى النقطة التى تنصف $\overline{أب}$ هما

أ (٠ ، ١) ب (١ ، ٠) جـ (٠ ، -١) د (-١ ، ٠)

(٣) المسافة بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (١٠ ، -٢) تساوى

أ ٩ ب ١٠ جـ $٢\sqrt{٦٠}$ د ٦

(٤) الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة

أ (١ ، ٤) ب (٥ ، ٠) جـ (٢٥ ، ٠) د (٥ ، ١)

(٥) معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٥) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدات هى:-

أ $(س - ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩$ ب $(س + ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩$

جـ $(س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩$ د $(س - ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٤٩$

(٦) محيط الدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٨$

أ ٨ π ب ٦٤ π جـ $٢\sqrt{٢}$ π د $٤\sqrt{٢}$ π

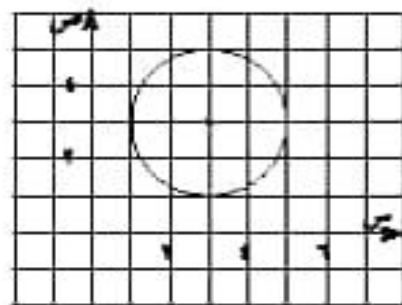
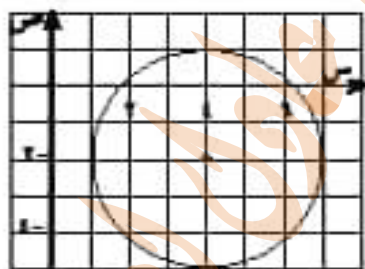
(٧) اكتب معادلة الدائرة التى مركزها م وطول نصف قطرها س إذا كان:

أ م (٢ ، ٣) ، س = ٥ ب م (٠ ، ٠) ، س = ٤

جـ م (٣ ، ٠) ، س = ٦ د م (٤ ، -٥) ، س = $\sqrt{٧}$

(٨) اكتب معادلة الدائرة التى يمثلها الرسم المعطى

أ

ب

(٩) أوجد معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (٧ ، -٥)، وتمر بالنقطة أ(٣ ، ٢).

ب $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ(٦ ، -٤) ، ب(٠ ، ٢).

(١٠) أوجد إحداثيى المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

أ $س^٢ + ص^٢ = ٢٧$ ب $(س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩$

(١١) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة فى الحالات الآتية:

أ) مركزها م(٢ ، ١)، وطول قطرها يساوى ٨.

ب) مركزها م (٠ ، ٠)، وتمر بالنقطة أ (-١ ، ٣)

جـ) مركزها م (-٥ ، ٠)، وتمر بالنقطة ب (٣ ، ٤)

د) $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ(٣ ، -٧) ، ب(٥ ، ١)

(١٢) أوجد إحداثى المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية

أ) س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠

ب) س^٢ + ص^٢ + ٢س = ٨

جـ) س^٢ + ص^٢ - ٦س + ١٠ص = ٠

د) س^٢ + ص^٢ - ٨س = ١٢

(١٣) بين أى دائرتين مما يلى متطابقتان

أ) س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص - ٣ = ٠ ، س^٢ + ص^٢ + ٦س - ١١ = ٠

ب) س^٢ + ص^٢ - ١٤س + ٣٧ = ٠ ، س^٢ + ص^٢ + ١٠س + ١٣ = ٠

(١٤) بين أى المعادلات الآتية تمثل دائرة ، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها:

أ) س^٢ + ص^٢ + ٨س - ١٦ص - ١ = ٠

ب) س^٢ + ٢ص^٢ + ٦س - ٥ص = ٠

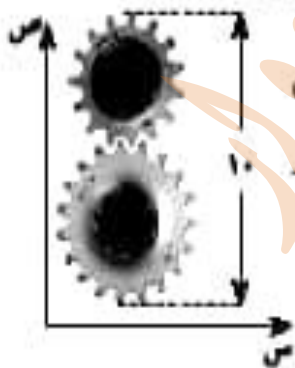
جـ) $\frac{1}{4}$س^٢ + $\frac{1}{4}$ص^٢ + س - ٨ = ٠

د) س^٢ + ص^٢ + ٢س ص - ١٢ = ٠

هـ) س^٢ + ص^٢ - ٢س + ٤ص + ٧ = ٠

و) ٢س^٢ + ٢ص^٢ + ٣ص - ٨ = ٠

(١٥) **الملاحة البحرية** يقع رادار عند الموقع أ(٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحدد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠)؟ فسر إجابتك.

(١٦) **التصميم المعمارى** صمم مهندس معمارى مبنى قاعدته على شكل ثمانى منتظم، تمر رؤوسه بالدائرة س^٢ + ص^٢ - ٤س + ١٢ص - ٦٠ = ٠ احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة

(١٧) **الصناعة** يبين الشكل المقابل ترسين فى آلة مركزيهما يقعا على مستقيم يوازى محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات. أوجد معادلة الترس الأصغر علمًا بأن معادلة الترس الأكبر هى: س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٨ص + ٣٢ = ٠

ص ، س ، ١٠